*INTERMATHS, VOL. 5, NO. 2 (**2024**)*, **93–105**
https://doi.org/10.22481/intermaths.v5i2.15564

Uma nota sobre os números quasessuavemente ondulantes

One note on quasi-smoothly undulating number

Douglas Catulio Santos [a,⋆], **Eudes Antonio Costa** [b], **Fernando Soares Carvalho** [a]

[a] Secretaria de Educação do Estado da Bahia, Barreiras - BA, Brasil; [b] Universidade Federal do Tocantins, Arraias - TO, Brasil

* Autor Correspondente: catuliodouglas@outlook.com

Resumo: Os números suavemente ondulantes podem ser considerados como casos específicos dos números inteiros quasessuavemente ondulantes. Embora alguns estudos apresentem números primos pertencentes à classe dos números suavemente ondulantes e apresentem critérios de divisibilidade, há evidências de que, quando os números suavemente ondulantes são do tipo $um - zero$, existe apenas um número primo, à saber, o número 101. Além disso, outras pesquisas mostram relações entre os números suavemente ondulantes e potências com expoentes naturais. Neste trabalho, apresentamos os resultados de nossa investigação acerca de uma nova classe de números inteiros, os números quasessuavemente ondulantes. Discutimos propriedades relativas a critérios de divisibilidade, primalidade e quadrados perfeitos, analisando algumas subclasses de quasessuavemente ondulantes. Fornecemos as fórmulas para determiná-los e as somas parciais geradoras para essa classe de números. As ferramentas e propriedades empregadas nas demonstrações são de natureza elementar, envolvendo essencialmente conceitos de divisibilidade e congruência.

Palavras-chave: Divisibilidade; Primos; Quadrados perfeitos; Quasessuavemente ondulantes.

Abstract: The smoothly oscillating numbers can be understood as specific instances of quasismoothly oscillating integers. While some studies present prime numbers within the class of smoothly oscillating numbers and demonstrate various divisibility criteria, it has been shown that, for smoothly oscillating numbers of the $one - zero$ type, there is only one prime number, which is 101. Additionally, other research illustrates connections between smoothly oscillating numbers and powers with natural exponents. In this paper, we present the results of our investigation into the new class of integers known as quasismoothly oscillating numbers. We explore properties related to divisibility criteria, primality, and perfect squares, analyzing some subclasses of quasismoothly oscillating numbers. We provide expressions for their determination and partial generating sums for this class of numbers. The tools and properties employed in the proofs are elementary, primarily involving concepts of divisibility and congruence.

keywords: Divisibility; Perfect Squares; Primes; Quasi-smoothly Undulating.

1 Introdução

O interesse pelos números e suas propriedades categorizando-os em classes e subclasses que possuem uma propriedade destacada remonta à antiguidade. Algumas dessas propriedades

Submetido em: 13 de Novembro de 2024 Aprovado em: 23 de Dezembro de 2024 Publicado em: 31 de Dezembro de 2024
ISSN 2675-8318

definem classes (conjuntos) ou subclasses nos inteiros, entre as diversas propriedades numéricas interessantes destacamos: números perfeitos, números primos, números de Fibonacci, números repunidades, dentre outras classes. Nestas notas, definimos os números quasessuavemente ondulantes e estudamos algumas de suas propriedades, destacamos fatos fascinantes como por exemplo, 2024 e 2025 são ambos quasessuavemente ondulantes, nenhum deles é primo, porém $2025 = 25^2$ é um quadrado perfeito.

Considere $x = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_3a_2a_1a_0$, com $a_i \in D = \{0, 1, \dots, 8, 9\}$, para $i = 0, \cdots, n-1$ e $a_{n-1} \neq 0$. Para todo $n \geq 1$ dizemos que x é um número inteiro positivo (natural) qualquer escrito (representado) no sistema decimal (base 10) com n dígitos ou algarismos.

Dizemos que x é um número ondulante quando seus dígitos adjacentes alternadamente aumentam e diminuem, ou vice-versa. Em outras palavras, para todo índice $0 \leq i \leq n-1$ devemos ter $a_i > a_{i+1}$ ou $a_i < a_{i+1}$ alternadamente. Exemplos de números ondulantes incluem 103, 317, 2021, 9494, 52326 e 3535353. Um subconjunto dos números ondulantes em que a diferença entre os algarismos adjacentes é constante, ou seja, para todo i ,$|a_{i+1} - a_i| = |a_{i+2} - a_{i+1}|$, é denominado de números suavemente ondulantes, por exemplo 9494, 32323, 3535353 e 55555555, sendo este último também denominado de monodígito. Para mais detalhes, consulte as referências [1–3].

Usaremos a notação $ab_{[n]}$, com $n \geq 2$, para indicar um número da forma $\underbrace{abab\dots abab}_{n}$ ou $\underbrace{abab\dots ababa}_{n}$. Assim $ab_{[n]}$ denota os números suavemente ondulantes, em que a e b $\in \{0, 1, 2, 3, 5, 5, 6, 7, 8, 9\}$ com $a \neq 0$. Para o caso em que $a = 1$ e $b = 0$, também indicaremos por $uz_{[n]}$, os números suavemente ondulantes do tipo $um - zero$. Em notação decimal, conforme [4], a Equação (1.1) é conhecida como Fórmula de Binet para os números $um - zero$

$$uz_{[n]} = \begin{cases} \dfrac{10^{2k} - 1}{99} \,, & \text{se} \quad n = 2k - 1 \,, \\[2ex] \dfrac{10^{2k+1} - 10}{99} \,, & \text{se} \quad n = 2k \,. \end{cases} \tag{1.1}$$

Um fato interessante e conhecido acerca dos números suavemente ondulantes da forma $ab_{[2k]}$ é que são todos compostos, basta observar que são múltiplos do número ab e também múltiplo de $uz_{[2k-1]}$, veja [1, Proposição 2.2] e referências.

Considere os números 102, 8080802, 2025, 21313, 32132, 414341, 5343434, 1017101 e 71010101, usando a notação acima para os números $ab_{[n]}$, podemos reescrever este números na forma:

$$\begin{array}{ccc} 102 = 10_{[2]}2 & 8080802 = 80_{[6]}2 & 2025 = 20_{[3]}5 \\ 21313 = 213_{[4]} & 32132 = 32_{[2]}132_{[2]} & 414341 = 41_{[3]}341_{[2]} \\ 5343434 = 534_{[6]} & 1017101 = 10_{[3]}710_{[3]} & 71010101 = 710_{[7]} \end{array} \tag{1.2}$$

Agora vamos definir uma nova classe de números para os números apresentados na Equação (1.2), a qual chamaremos de números *quasessuavemente ondulantes*, que é o foco desse trabalho.

Definição 1.1. *Um número natural x, formado por $n+1$ algarismos, com $n \geq 2$ natural e que contenha o(s) número(s) $ab_{[n_i]}$ e o algarismo c apareça uma única vez é chamado de quasessuavemente ondulante, sendo a, b e $c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $i \in \{1, 2\}$. No caso em que $a = 1$ e $b = 0$ temos os números quasessuavemente ondulantes do tipo $quase - um - zero$.*

Assim os números listados na Equação (1.2) são exemplos de números quasessuavemente ondulantes. Em destaque, os números $103 = 10_{[2]}3$, $91010101 = 910_{[7]}$ e $1017101010 = 10_{[3]}710_{[6]}$ são números quasessuavemente ondulantes do tipo $quase - um - zero$.

Por simplicidade usaremos a notação $quase - ab$ referindo aos números quasessuavemente ondulantes e $quase - uz$ referindo aos números quasessuavemente ondulantes do tipo $quase - um - zero$.

Aqui investigaremos as propriedades aritméticas desta classe especial de números. Propriedades associadas aos critérios de divisibilidade dos números quasessuavemente ondulantes, bem como exibiremos alguns números primos pertencente à essa classe de números, como por exemplo o número 103.

Ainda que a exponenciação modular seja eficiente, a verificação da primalidade de números $quase - ab$ torna-se computacionalmente desafiadora com o aumento de n. A dificuldade reside na falta de um algoritmo eficiente para fatorar números com milhares de dígitos, o que é crucial para determinar se um número natural é primo ou não, essa dificuldade se estende também aos números $quase - ab$, ou seja, não sabemos se existem ou não infinitos números primos do tipo $quase - ab$.

Neste trabalho, apresentamos, discutimos e analisamos resultados referentes a uma nova classe de números inteiros, os números quasessuavemente ondulantes. Na Seção 2, introduzimos as subclasses que serão abordadas no estudo e derivamos uma expressão geral para cada uma delas. Em seguida, na Seção 3, examinamos as condições sob as quais os números quasessuavemente ondulantes não são primos e, com o auxílio de métodos computacionais, apresentamos uma listagem de primos em três classes distintas. Nas duas últimas seções, concentramos nossos esforços nos números $quase - um - zero$ e demonstramos que não existem quadrados perfeitos em quatro subclasses analisadas. Consequentemente, nenhum desses números pode ser expresso por uma potência com um expoente par. Assim, ainda não foi possível generalizar o comportamento dos quadrados perfeitos para valores arbitrários de a, b e c.

Uma ressalva importante, por simplicidade em todo este texto n indica a quantidade de algarismos de um número. Assim, escrevemos ou indicamos n, quando estamos indicando n algarismos.

2 Preliminares e Expressão geral

Os números do tipo $um - zero$: $1, 101, 10101, ...$, isto é, $uz_{[2k+1]}$ para todo $k \geq 1$, formam a sequência A094028 listada em OEIS [5]. Sabe-se que exceto 101, nenhum outro número do tipo $uz_{[2k+1]}$ é primo[1]. Ademais, em [1] os autores exibem condições em que um número da forma $ab_{[n]}$ não é primo.

Conforme notação à seguir, nosso estudo acerca da divisibilidade e primalidade de números $quase - ab$ se restringirá aos seguintes casos particulares:

$$ab_1[n,c] = ab_{[n]}c\ , \tag{2.1}$$

$$ab_2[n,c] = cab_{[n]}\ , \tag{2.2}$$

$$ab_3[2n,c] = ab_{[n]}cab_{[n]} \tag{2.3}$$

$$ab_4[m,n,c] = ab_{[m]}cab_{[n]}\ . \tag{2.4}$$

[1] Fato abordado em vários trabalhos, no entanto foi proposto, e resolvido, pela primeira vez em 1989, durante a competição matemática de Putnam [6]. Uma competição matemática que desde 1927 é administrada pela *Mathematical Association of America*.

Por exemplo,

$$\begin{aligned}
25_1[6,3] &= 2525253 &= 25_{[6]}3,\\
17_2[5,6] &= 617171 &= 617_{[5]},\\
27_3[6,9] &= 2729272 &= 27_{[3]}927_{[3]},\\
17_4[4,3,5] &= 17175171 &= 17_{[4]}517_{[3]}\ .
\end{aligned}$$

Como registrado, quando $a = 1$ e $b = 0$, temos os números $quase - uz$ e equivalentemente usaremos a seguinte notação para indicar os números desta classe:

$$\begin{aligned}
uz_1[n,c] &= 10_{[n]}c\\
uz_2[n,c] &= c10_{[n]}\\
uz_3[2n,c] &= 10_{[n]}c10_{[n]}\ ,\\
uz_4[m,n,c] &= 10_{[m]}c10_{[n]}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

assim $uz_1[2,3] = 103$, $uz_2[5,3] = 310101$, $uz_3[6,3] = 1013101$ e $uz_4[6,5,7] = 101010710101$.

Em nossa base decimal usual, ou sistema posicional decimal, o número $2024 = 20_1[3,4]$ pode ser escrito (representação polinomial por agrupamentos de potências de 10) na forma:

$$\begin{aligned}
2024 &= 2\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 4\\
&= (2\cdot 10^2 + 0\cdot 10 + 2)\cdot 10 + 4\\
&= 20_{[3]}\cdot 10 + 4\ .
\end{aligned}$$

Como consequência da representação polinomial de um número na base decimal, as Equações (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4) podem ser reescritas na forma:

$$\begin{aligned}
ab_1[n,c] &= ab_{[n]}\cdot 10 + c\ ,\\
ab_2[n,c] &= c\cdot 10^n + ab_{[n]}\ ,\\
ab_3[2n,c] &= ab_{[n]}\cdot 10^{n+1} + c\cdot 10^n + ab_{[n]} = ab_{[n]}(10^{n+1}+1) + c\cdot 10^n\ ,\\
ab_4[m,n,c] &= ab_{[m]}\cdot 10^{n+1} + c\cdot 10^n + ab_{[n]}\ .
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Na Equação (2.6) fazendo $a = 1$ e $b = 0$ temos que:

$$\begin{aligned}
10_1[n,c] &= 10_{[n]}\cdot 10 + c\ ,\\
10_2[n,c] &= c\cdot 10^n + 10_{[n]}\ ,\\
10_3[2n,c] &= 10_{[n]}(10^{n+1}+1) + c\cdot 10^n\\
10_4[m,n,c] &= 10_{[m]}\cdot 10^{n+1} + c\cdot 10^n + 10_{[n]}\ .
\end{aligned} \tag{2.7}$$

De acordo com [1] os números *suavemente ondulantes* do tipo $ab_{[n]}$ podem ser escritos na forma:

$$ab_{[n]} = \begin{cases} a\sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}} 10^{2i} + b\sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} 10^{2i-1}, & \text{se } n \text{ é ímpar;}\\[2ex] a\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} 10^{2i-1} + b\sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} 10^{2i}, & \text{se } n \text{ é par}\ . \end{cases} \tag{2.8}$$

O próximo resultado apresentará uma expressão geral para cada tipo dos números $quase - ab$.

Proposição 2.1. *Seja n um número inteiro, então* *(a)* $ab_1[n,c] = a \cdot \left(\dfrac{10^{n+2}-10}{99}\right) + b \cdot \left(\dfrac{10^{n+1}-10^2}{99}\right) + c$, *$n$ ímpar.*

(b) $ab_1[n,c] = a \cdot \left(\dfrac{10^{n+2}-10^2}{99}\right) + b \cdot \left(\dfrac{10^{n+1}-10}{99}\right) + c$, *$n$ par.*

(c) $ab_2[n,c] = c \cdot 10^n + a \cdot \left(\dfrac{10^{n+1}-1}{99}\right) + b \cdot \left(\dfrac{10^{n}-10}{99}\right)$, *$n$ ímpar.*

(d) $ab_2[n,c] = c \cdot 10^n + a \cdot \left(\dfrac{10^{n+1}-10}{99}\right) + b \cdot \left(\dfrac{10^{n}-1}{99}\right)$, *$n$ par.*

(e) $ab_3[2n,c] = a \cdot \left(\dfrac{10^{2n+2}-1}{99}\right) + c \cdot 10^n + b \cdot \left(\dfrac{10^{2n+1}-10^{n+2}+10^n-10}{99}\right)$, *$n$ ímpar.*

(f) $ab_3[2n,c] = a \cdot \left(\dfrac{10^{2n+2}-10^{n+2}+10^{n+1}-10}{99}\right) + c \cdot 10^n + b \cdot \left(\dfrac{10^{2n+1}-10^{n+1}+10^n-1}{99}\right)$, *$n$ par.*

(g) $ab_4[m,n,c] = a \cdot \left(\dfrac{10^{m+n+2}-1}{99}\right) + c \cdot 10^n + b \cdot \left(\dfrac{10^{m+n+1}-10^{n+2}+10^n-10}{99}\right)$, *$m$ e n ímpar.*

(h) $ab_4[m,n,c] = a \cdot \left(\dfrac{10^{m+n+2}-10}{99}\right) + c \cdot 10^n + b \cdot \left(\dfrac{10^{m+n+1}-10^{n+2}+10^n-1}{99}\right)$, *$m$ ímpar e n par.*

(i) $ab_4[m,n,c] = a \left(\dfrac{10^{m+n+2}-10^{n+2}+10^{n+1}-1}{99}\right) + c \cdot 10^n + b \left(\dfrac{10^{m+n+1}-10^{n+2}+10^n-10}{99}\right)$, *$m$ par e n ímpar.*

(j) $ab_4[m,n,c] = a \left(\dfrac{10^{m+n+2}-10^{n+2}+10^{n+1}-10}{99}\right) + c \cdot 10^n + b \left(\dfrac{10^{m+n+1}-10^{n+1}+10^n-1}{99}\right)$, *$m, n$ par.*

Demonstração. (a) Veja que

$$ab_1[n,c] = ab_{[n]} \cdot 10 + c\ .$$

Sendo n ímpar e usando a Equação (2.8) obtemos o resultado.

De modo similar para os itens *(b), (c)* e *(d).*

(e) Veja que

$$ab_3[2n,c] = ab_{[n]} \cdot 10^{n+1} + c \cdot 10^n + ab_{[n]}\ ,$$

e aplicar mesmos procedimentos.

(f) Similar ao item *(e).*

(g) Veja que

$$ab_4[m,n,c] = ab_{[m]} \cdot 10^{n+1} + c \cdot 10^n + ab_{[n]}\ ,$$

Sendo m e n ímpares e usando a Equação (2.8) obtemos o resultado.

De modo similar para os itens *(h), (i)* e *(j)* □

Na Proposição 2.1 fazendo $a = 1$ e $b = 0$, por um cálculo direto, obtemos que:

Proposição 2.2. *Para todo inteiro $n \geq 2$, $0 \leq c \leq 9$, temos que* *(a)* $uz_1[n,c] = \dfrac{10(10^{2n}-1)+99c}{99}$ *e n par;*

(b) $uz_2[n,c] = \dfrac{10^{2n-1}(99c+10)-1}{99}$ *e n par;*

(c) $uz_3[n,c] = \dfrac{10^{2n-1}(10^{2n+1}+99c)-1}{99}$ *e n par;*

(d) $uz_1[n,c] = \dfrac{10^{2n+2}-100+99c}{99}$ *e n ímpar;*

(e) $uz_2[n,c] = \dfrac{10^{2n}(99c+10)-10}{99}$ *e n ímpar;*

(f) $uz_3[n,c] = \dfrac{10^{2n}(10^{2n+2}+99c-90)-10}{99}$ *e n ímpar.*

(g) $uz_4[m,n,c] = \dfrac{10^{n}(10^{m+2}-10+99c)+10^{n+1}-1}{99}$ *e m, n ímpar.*

(h) $uz_4[m,n,c] = \dfrac{10^{n}(10^{m+2}-10+99c)+10^{n+1}-10}{99}$*, m ímpar e n par.*

(i) $uz_4[m,n,c] = \dfrac{10^{n}(10^{m+2}-10^2+99c)+10^{n+1}-1}{99}$*, m par e n ímpar.*

(j) $uz_4[m,n,c] = \dfrac{10^{n}(10^{m+2}-10^2+99c)+10^{n+1}-10}{99}$ *e m, n par.*

3 Números quasessuavemente ondulante primos

Nesta seção serão apresentadas propriedades dos números quasessuavemente ondulantes. Em particular, se $a = 1$ e $b = 0$ temos um número quasessuavemente ondulante do tipo $quase - uz$. Tais propriedades estão relacionadas com alguns dos critérios de divisibilidade e ainda são exibidas tabelas de números primos quasessuavemente ondulantes dos tipos $ab_1[n,c]$, $ab_2[n,c]$ e $ab_3[2n,c]$.

Nos resultados adiante procuraremos eliminar os possíveis números primos do tipo quasessuavemente ondulante.

Proposição 3.1. *Para todo número natural n, tem-se que $ab_1[n,c]$ não é primo se $c \in \{0,2,4,5,6,8\}$.*

Demonstração. Basta observar que para $c \in \{0,2,4,5,6,8\}$ temos que $ab_1[n,c]$ é par ou múltiplo de 5. □

Com argumentos similares aos utilizados na Proposição 3.1 obtemos os dois próximos resultados.

Proposição 3.2. *Para todo número natural ímpar $n \geq 3$, tem-se que $ab_2[n,c]$, $ab_3[2n,c]$ e nem $ab_4[m,n,c]$ são primos se $a \in \{0,2,4,5,6,8\}$.*

Proposição 3.3. *Para todo número natural par $n \geq 3$, tem-se que $ab_2[n,c]$, $ab_3[2n,c]$ e nem $ab_4[m,n,c]$ são primos se $b \in \{0,2,4,5,6,8\}$.*

Agora vamos relembrar um resultado auxiliar, o clássico critério de divisibilidade por 3, que pode ser consultado em [7].

Lema 3.4. *[7] Um número inteiro é divisível por 3 se, e somente se, a soma dos seus algarismos é um múltiplo de 3.*

Proposição 3.5. *Para todo número natural par n, se $c \in \{0,3,6,9\}$ e $a+b \equiv 0 \mod 3$, com $b \neq c$, então nenhum $ab_1[n,c]$ é primo.*

Demonstração. Basta observar que para c =0, 3, 6 ou 9 e $a+b \equiv 0 \mod 3$, isto é, se $a+b$ for um múltiplo de 3, então a soma dos algarismos de $ab_1[n,c]$ será um múltiplo de 3. Portanto, segue do Lema 3.4 que todo $ab_1[n,c]$ com estas condições não são primos,tendo em vista que serão múltiplos de 3. □

De forma análoga à Proposição 3.5, não são primos os números da forma:

- $ab_2[n,c], ab_3[2n,c]$ e $ab_4[m,n,c]$, com $c \in \{0,3,6,9\}$ e $a+b \equiv 0 \mod 3$;
- $ab_1[n,c], ab_2[n,c], ab_3[2n,c], uz_1[n,c], uz_2[n,c]$ e $uz_3[2n,c]$, com $a,b \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $c \in \{3,6,9\}$ e $n \equiv 0 \mod 3$;
- $uz_1[n,c]$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n+c \equiv 0 \mod 3$ e $n \geq 2$;
- $uz_2[n,c]$ e $uz_3[2n,c]$, com $n \in \mathbb{N}$ e $n+c \equiv 0 \mod 3$.

O próximo resultado também nos será útil, e pode ser consultado em [4].

Lema 3.6. *[4] Se n é ímpar, com $n \equiv 2 \mod 3$, então $uz_{[n]}$ é múltiplo de 3.*

Proposição 3.7. *Para quaisquer m e n ímpares, se $m,n \equiv 2 \mod 3$ e $c \in \{0,3,6,9\}$, então nenhum $uz_4[m,n,c]$ é primo.*

Demonstração. Como $uz_4[m,n,c] = 10_{[m]} \cdot 10^{n+1} + c \cdot 10^{n+1} + 10_{[n]}$, o resultado segue de forma imediata com o auxílio do Lema 3.6. □

Com o conhecimento dos resultados desta seção, formulamos as Tabelas (1), (2) e (3) que mostram a existência de primos quasessuavemente ondulates. Na Tabela (1), a seguir, apresentamos todos números primos quasessuavemente ondulantes da forma $ab_1[15,c]$.

Tabela 1. Números primos da forma $ab_1[15,c]$.

c	(a,b)
1	(1,7), (2,3), (2,6), (2,9), (3,4), (5,6), (5,8), (6,0), (6,9), (7,2), (8,3)
3	(1,9), (4,2), (4,6), (5,6), (8,0), (8,6)
7	(5,3), (5,6), (6,0), (7,1)
9	(2,0), (3,1), (3,4), (3,8), (4,0), (4,3)

Já na Tabela (2) apresentamos todos números primos quasessuavemente ondulantes da forma $ab_2[13,c]$.

Tabela 2. Números primos da forma $ab_2[13, c]$.

a	(b, c)
1	(0,2), (2,1), (4,7), (5,1)
3	(0,2), (0,4), (0,8), (4,5)
7	(0,1), (2,1), (4,6), (4,9), (5,6), (6,4), (9,1)
9	(2,7), (4,7), (5,8), (7,2), (7,5), (8,2)

Enquanto na Tabela (3) apresentamos todos números primos quasessuavemente ondulantes da forma $ab_3[10, c]$.

Tabela 3. Números primos da forma $ab_3[2 \cdot 5, c]$.

a	(b, c)
1	(0,8), (2,5), (3,1), (4,6), (4,9), (5,9), (6,4)
3	(2,8), (3,4), (4,3), (6,1), (6,4), (6,8), (7,3), (7,6)
7	(0,2), (2,6), (4,7), (5,6), (7,6), (9,1), (9,8)
9	(1,3), (4,6), (4,7), (7,6), (9,1)

Os números primos quasessuavemente ondulantes listados acima foram obtidos com auxílio computacional (Octave). Mesmo usando os resultados aqui apresentados para facilitar (limitar) nossa busca, tivemos uma limitação computacional na quantidade de algarismos de um número, assim na Tabela 1 listamos todos os números primos com exatamente 16 algarismos, na Tabela 2 os números com 14 algarismos, enquanto na Tabela 3 consideramos todos os números primos com 21 algarismos.

4 Números quadrados perfeitos quase-um-zero

Nesta seção, apresentamos algumas propriedades relacionadas aos números quadrados perfeitos que também são números quasessuavemente ondulantes do tipo $quase - uz$.

Lembramos que um número inteiro positivo m é considerado um quadrado perfeito se existir um inteiro d tal que $m = d^2$. Para facilitar a organização e a leitura, faremos uso dos resultados auxiliares apresentados nos lemas a seguir. As demonstrações desses lemas baseiam-se em resultados clássicos de divisibilidade (ou congruência), os quais podem ser consultados na referência indicada.

Lema 4.1. *[7] Em um quadrado perfeito o algarismo das unidades só pode ser um dos seguintes: 0, 1, 4, 5, 6 ou 9.*

Lema 4.2. *[7] Todo número quadrado perfeito é da forma $4q$ ou $4q + 1$.*

Lema 4.3. *[7] Todo número quadrado perfeito é da forma $8q$, $8q + 1$ ou $8q + 4$.*

A seguir apresentamos um resultado proposto por [2], no entanto aqui apresentamos outra demonstração mais simples e direta, a saber que:

Teorema 4.4. *[2] Se $n > 1$, nenhum $uz_{[n]}$ é um quadrado perfeito.*

Demonstração. Para $n = 2$ temos que $10 = 2 \cdot 5$ não é um quadrado perfeito, e para $n = 3$ temos que 101 é primo. Para $n > 3$ faremos separando em dois casos, n ímpar ou n par.

Admita $n > 3$ ímpar, então $uz_{[n]}$ é da forma

$$uz_{[n]} = \underbrace{101\ldots101}_{n} = \underbrace{101\ldots010}_{n} \cdot 10^3 + 101 \ ,$$

como 8 é um fator de 10^3 e $101 = 8 \cdot 12 + 5$, então para n ímpar $uz_{[n]}$ é da forma $8q + 5$. Portanto, o Lema 4.3 garante que $uz_{[n]}$ não é quadrado perfeito.

Se $n > 3$ é par, como $uz_{[n]} = 10 \cdot uz_{[n-1]}$, Corolário 3.6 em [4]. Desde que $mdc(10, uz_{[n-1]}) = 1$, o resultado segue de forma imediata. ☐

Uma consequência do resultado anterior é que:

Proposição 4.5. *Para todo $n > 2$ têm-se que nenhum número $quase-uz$ do tipo $uz_1[n, c]$ é um quadrado perfeito, com $c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.*

Demonstração. Os casos em que $c = 2, 3, 7$ e 8 são consequências imediatas do Lema 4.1.

O caso $c = 0$ e n ímpar $uz_1[n, 0] = uz_{[n+1]}$ e o resultado segue do Teorema 4.4. Agora, se n é par $uz_1[n, 0] = 10uz_{[n]} = 10^2 uz_{[n-1]}$, como $mdc(10^2, uz_{[n-1]}) = 1$, $uz_{[n-1]}$ é livre de quadrados (Teorema 4.4), e o resultado segue.

Se $c = 1$, e n é ímpar temos

$$uz_1[n, 1] = \underbrace{101\ldots101}_{n}1 = \underbrace{101\ldots100}_{n}0 + 11 = 10^2 \cdot uz_{[n-1]} + 11,$$

como 4 é um fator de 10^2 e $11 = 4 \cdot 2 + 3$, então $uz_1[n, c]$ é da forma $4q + 3$, logo pelo Lema 4.2 não pode ser um quadrado perfeito. Agora, se n é par, $uz_1[n, 1] = \underbrace{101\ldots10101}_{n+1} = uz_{[n+1]}$, segue facilmente que $uz_1[n, c]$ não pode ser quadrado perfeito.

Se $c = 4$ e n ímpar, segue que

$$uz_1[n, 4] = \underbrace{101\ldots101}_{n}4 = \underbrace{101\ldots1000}_{n+1} + 14 = 10^2 \cdot uz_{2(k-1)} + 14 \ ,$$

como $14 = 4 \cdot 3 + 2$, então $uz_1[n, 4]$ é do formato $4q + 2$ e pelo Lema 4.2 não é quadrado perfeito. Quando n é par temos:

$$uz_1[n, 4] = \underbrace{101\ldots1010}_{n}4 = 4 \cdot \underbrace{2525\ldots2526}_{n} = 4 \cdot 25_1[n-1, 6] \ ,$$

por outro lado, como $26 = 4 \cdot 6 + 2$, então $25_1[n-1, 6]$ é da forma $4q + 2 = 2(2q + 1)$. Pelo item *(b)* da Proposição 2.1 segue que

$$25_1[n-1, 6] = \underbrace{2525\ldots2526}_{n} = \underbrace{2525\ldots25200}_{n} + 26 = 10^2 \cdot \underbrace{2525\ldots25}_{n} + 26 \ ,$$

assim $uz_1[n, 4] = 8 \cdot (2q + 1)$, como $mdc(8, 2q + 1) = 1$, concluímos que $uz_1[n, 4]$ não pode ser quadrado perfeito.

Se $c = 5$ e n ímpar, implica em

$$uz_1[n, c] = \underbrace{101\ldots101}_{n}5 = \underbrace{101\ldots1000}_{n+1} + 15 = 10^2 \cdot uz_{2(k-1)} + 15 \ ,$$

em que $n+1=2k$, para algum k natural. Como $15=4\cdot 3+3$ o resultado segue do Lema 4.2. No caso em que n é par, obtemos com auxílio do item *(b)* da Proposição 2.1 que

$$uz_1[n,5]=\underbrace{1010\ldots 10105}_{n+1}=5\cdot\underbrace{2020\ldots 2021}_{n}=5\cdot 20_1[n-1,1]$$

como $mdc(5,20_1[n-1,1])=1$ o resultado é imediato.

Se $c=6$ e n ímpar, observe que pelo item *(a)* da Proposição 2.1 temos

$$uz_1[n,6]=\underbrace{101\ldots 101}_{n}6=4\cdot\underbrace{2525\ldots 25254}_{n}=4\cdot 25_1[n-1,4]\ ,$$

por outro lado, como $54=4\cdot 13+2$, então $25_1[n-1,4]$ é da forma $4q+2=2(2q+1)$, tendo em vista que

$$25_1[n-1,4]=\underbrace{2525\ldots 25254}_{n}=\underbrace{2525\ldots 25200}_{n}+54=10^2\cdot\underbrace{2525\ldots 252}_{n}+54\ ,$$

assim $uz_1[n,6]=8\cdot(2q+1)$, como $mdc(8,2q+1)=1$, concluímos que $uz_1[n,6]$ não pode ser quadrado perfeito. Por outro lado, se n for par, então

$$uz_1[2k+1,1]=\underbrace{101\ldots 10106}_{n+1}=\underbrace{101\ldots 100}_{2k}+6=10^2\cdot uz_{n-2}+6$$

como $6=4\cdot 1+2$ o resultado segue do Lema 4.2.

Pra finalizar, se $c=9$ e n ímpar, veja que

$$uz_1[n,9]=\underbrace{101\ldots 101}_{n}9=\underbrace{101\ldots 100}_{2k}+19=10^2\cdot uz_{n-2}+19,$$

em que $n+1=2k$, para algum k natural. Como $19=4\cdot 4+3$, o Lema 4.2 garante o resultado. Agora, se n é par

$$uz_1[n,9]=\underbrace{101\ldots 10109}_{n+1}=\underbrace{101\ldots 1000}_{n+1}+109=10^3\cdot uz_{n-2}+109,$$

como $109=8\cdot 23+5$ o resultado segue do Lema 4.3. □

Proposição 4.6. *Nenhum número quase $-$ uz do tipo $uz_2[n,c]$ é um quadrado perfeito, para $n>2$.*

Demonstração. Se n é ímpar, então $uz_2[n,c]$ pode ser reescrito da forma

$$\begin{aligned} uz_2[n,c] &= c\cdot 10^n+\underbrace{101\ldots 101}_{n}=c\cdot 10^n+\underbrace{101\ldots 10}_{n-3}\cdot 10^3+101\\ &= 10^3(c\cdot 10^{n-3}+\underbrace{101\ldots 10}_{n-3})+101\ . \end{aligned}$$

Como 8 é um fator de 10^3 e $101=8\cdot 12+5$, logo $uz_2[n,c]$ com n ímpar tem a forma $8q+5$ e portanto o resultado segue do Lema 4.3.

Para n par, basta observar que $uz_2[n,c]=10\cdot uz_2[n-1,c]$, o resultado segue do fato que $mdc(10,uz_2[n-1,c])=1$. □

Com argumentos análogos mostra-se também que:

Proposição 4.7. *Nenhum número quase − uz do tipo* $uz_3[n, c]$ *é um quadrado perfeito, para* $n > 2$.

Proposição 4.8. *Nenhum número quase − uz do tipo* $uz_4[m, n, c]$ *é um quadrado perfeito, para* $m, n > 2$.

A Proposição 4.5 garante que nenhum $uz_1[n, c]$ é um quadrado perfeito, entretanto:

Proposição 4.9. *Para todo* $n = 2k$ *com* $k \geq 2$*, então a diferença* $uz_1[2k, c] - uz_1[2(k-1), c]$ *é um quadrado perfeito.*

Demonstração. De acordo com o item *(b)* do Proposição 2.2 temos

$$\begin{aligned} uz_1[2(k+1), c] - uz_1[2k, c] =& \frac{10^{2k+2} - 100 + 99c}{99} - \frac{10^{2k} - 100 + 99c}{99} = \frac{10^{2k+2} - 10^{2k}}{99} \\ =& \frac{10^{2k}(10^2 - 1)}{99} = (10^k)^2 \ . \end{aligned}$$

□

Com argumento similar mostra-se também que:

Proposição 4.10. *Se os números* ab *é quadrado perfeito e* n *par, então a diferença* $ab_1[2(k+1), c] - ab_1[2k, c]$ *é um quadrado perfeito.*

Outro interessante resultado é que

Proposição 4.11. *A diferença* $ab_1[2k+1, c] - ab_1[2k-1, c]$ *é um quadrado perfeito, desde que* $ab \in \{16, 25, 49, 64, 81\}$*, com* $k \geq 2$ *natural.*

Demonstração. Temos que $2k - 1$ e $2k + 1$ são ímpares para todo k. Segue do item *(a)* da Proposição 2.1 que:

$$\begin{aligned} ab_1[2k+1, c] =& a \cdot \left(\frac{10^{2k+3} - 10}{99}\right) + b \cdot \left(\frac{10^{2k+2} - 10^2}{99}\right) + c \\ ab_1[2k-1, c] =& a \cdot \left(\frac{10^{2k+1} - 10}{99}\right) + b \cdot \left(\frac{10^{2k} - 10^2}{99}\right) + c \ . \end{aligned}$$

Donde obtemos que

$$\begin{aligned} ab_1[2k+1, c] - ab_1[2k-1, c] =& a \cdot \left(\frac{10^{2k+3} - 10^{2k+1}}{99}\right) + b \cdot \left(\frac{10^{2k+2} - 10^{2k}}{99}\right) \\ =& a \cdot 10^{2k+1} + b \cdot 10^{2k} = (10a + b)10^{2k} \\ =& (ab) \cdot (10^k)^2 \ . \end{aligned}$$

Sendo $(10^k)^2 = 10^{2k} = 2^{2k} \cdot 5^{2k}$ um quadrado perfeito, então a diferença é um quadrado perfeito desde que o número ab também o seja. □

5 Números quase-um-zero e potências pares

Como mencionado, em [2] mostra-se que exceto $uz_{[1]}$, nenhum outro número suavemente ondulante do tipo $uz_{[n]}$ é um quadrado perfeito.

Como consequência, têm-se que:

Proposição 5.1. *[4, Proposition 7.4] Para $n \geq 2$, nenhum número suavemente ondulante do tipo $uz_{[n]}$ é uma potência par.*

Nesta seção, vamos estender este resultado para algumas subclasses dos números $quase - uz$, ou seja, mostraremos que estes também não podem ser expressos como potência par de um número natural.

Proposição 5.2. *Para $n > 2$, nenhum $uz_1[n, c]$ é uma potência par.*

Demonstração. Suponha que para algum inteiro d e $n > 2$ tenhamos $uz_1[n, c] = d^{2k}$, para algum conveniente inteiro $k > 0$. Este fato acarretaria que $uz_1[n+1, c]$ é um quadrado perfeito, pois $uz_1[n, c] = (d^k)^2$, contrariando a Proposição 4.5. □

De forma similar a Proposição 5.2 segue que:

Proposição 5.3. *Para $n > 2$, nenhum $uz_2[n, c]$ é uma potência par.*

Proposição 5.4. *Para $n > 2$, nenhum $uz_3[n, c]$ é uma potência par.*

Proposição 5.5. *Para $n > 2$, nenhum $uz_4[n, c]$ é uma potência par.*

Cada um destes resultados são consequências direta a cada uma das Proposições 4.6, 4.7 e 4.8, reciprocamente.

6 Considerações finais

Ao abordarmos esta nova classe de números inteiros, os quasessuavemente ondulantes, e as subclasses relevantes para nosso estudo, investigamos as condições que levam à não primalidade dos números quasessuavemente ondulantes e fornecemos uma listagem de números primos em três classes distintas. Ainda direcionamos nossa análise para os números $quase - um - zero$, demonstrando que esses números não possuem quadrados perfeitos dentro das classes examinadas. Consequentemente, esses números não podem ser expressos como potências com expoentes pares. Este resultado sugere que a generalização dos quadrados perfeitos para valores arbitrários de a, b e c ainda não foi possível, objeto de um trabalho futuro. Em suma, os resultados obtidos ampliam nossa compreensão sobre os números quasessuavemente ondulantes e abrem novas perspectivas para pesquisas futuras, especialmente no que se refere às propriedades de quadrados perfeitos e à sua expressão em termos de potências. Ainda numa perpectiva de extensão ou generalização destes resultados, temos em [1] exemplos de números que são duplamente ondulantes, ou seja, números que são ondulantes em duas bases distintas; para além disso, em [8] tem um estudo acerca dos números suavemente ondulantes em qualquer base $b > 1$ o que nos motiva a pensar em trabalhos futuros.

Contribuições

Todos os autores contribuíram substancialmente na concepção e/ou no planejamento do estudo; na obtenção, análise e/ou interpretação dos dados; na redação e/ou revisão crítica; e aprovaram a versão final a ser publicada.

Fontes de Financiamento

Este trabalho foi parcialmente suportado pela PROPESQ-UFT.

Orcid

Douglas Catulio Santos https://orcid.org/0000-0002-5221-6087
Eudes Antonio Costa https://orcid.org/0000-0001-6684-9961
Fernando Soares Carvalho https://orcid.org/0000-0001-6639-0716

Referências

1. F. S. Carvalho; E.A. Costa. "Um passeio pelos números ondulantes". *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, vol. 8, no. 2, p. e3001-e3001, 2022.
2. E. A. Costa; A. B. Souza. "Números ondulantes na forma 101...01". *Gazeta Matemática* , SPM, 2024.
3. C. A. Pickover . *Wonders of Numbers: Adventures in Mathematics, Mind, and Meaning* . (Chapters 52 and 88). Oxford University Press, 2003.
4. D. C. Santos; E. A. Costa. "Peculiarities of smoothly undulating number". *Intermaths* , vol. 4(2), pp. 38-53., 2023.
5. N. J. A. Sloane. *0EIS - The on-line encyclopedia of integer sequences*, http://oeis.org/A002275 .
6. PUTNAM Problems. **50th Putnam 1989**. Disponível em: https://prase.cz/kalva/putnam.html. Acesso em: 9 jan. 2024.
7. A. Hefez. *Aritmética* . SBM-Coleção PROFMAT, 2a. ed. Rio de Janeiro-RJ. SBM, 2016.
8. E. A. Costa; D. C. Santos. "Os números suavemente ondulantes generalizados". *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, 10(2), e3008-e3008, 2024.