

METODOLOGIAS ATIVAS APLICADAS AO ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Enéas Mendes de Jesus

Instituto Federal do Espírito Santo – Campus Piúma

Solon Gomes de Sousa

Universidade do Estado da Bahia

Resumo: As propriedades reflexivas das cônicas são utilizadas em muitas aplicações e podem ser exploradas a fim de tornar as aulas sobre o assunto mais atrativas. O presente trabalho relata uma atividade desenvolvida durante um curso de Geometria Analítica que objetivou inicialmente verificar a validade de tais propriedades. Para tal, utilizou-se objetos onde se verifica tais propriedades, mas que pudessem ser manufaturados diretamente pelos alunos. Por meio da metodologia de Aprendizagem Baseada em Projetos, a participação direta no processo de fabricação garantiu aos alunos que os objetos físicos (palpáveis) realmente tinham as características dos objetos matemáticos (abstratos). Assim, a validade das propriedades verificadas na prática foi utilizada para substituir o modelo de prova matemática convencional, sem perdas na fixação do conceito. Como resultado, muitos alunos desconstruíram a ideia de que a matemática só se faz de forma teórica e em sala de aula e que o conhecimento também se constrói de forma colaborativa por meio de projetos que desenvolvam o protagonismo e a aprendizagem ativa estimulando o interesse dos estudantes pelas disciplinas de matemática.

Palavras chave: Metodologias Ativas; Educação Matemática; Ensino Superior.

Introdução

O ensino da matemática está repleto de desafios em todos os níveis da educação. Em particular, no ensino superior, como destaca (TREVISAN, A.;TAVARES, M. M., 2013), este ainda se encontra baseado em modelos tradicionais de ensino, nos quais o professor apresenta os conteúdos aos estudantes e dá informações ou instruções de como resolver exercícios-tipo por meio de aulas expositivas. Como consequência, as competências desenvolvidas pelos alunos restringem-se às habilidades de reprodução e memorização, muitas desaparecendo logo após a realização de exames e provas centrados em aspectos classificatórios que priorizam o rendimento (nota) em detrimento de processos avaliativos emancipatórios que potencializam a efetiva aprendizagem e compreensão dos conceitos matemáticos (LUCKESI, 2018). Esta problemática está intimamente ligada às estruturas curriculares dos cursos, uma vez que os conteúdos a serem estudados são organizados, desde a ementa até ao livro texto, para

apresentar o conteúdo de forma objetiva, a partir de definições, teoremas, exemplos e exercícios. Acrescente a isto a falta de tempo para que as disciplinas sejam ruminadas e como resultado se obtém uma formação fragmentada e sem mudanças significativas (ALMEIDA, L.M.W., FATORI, L.H., SOUZA, L.G.S., 2007).

Como alternativa a um paradigma de ensino centrado estritamente na transmissão dos conteúdos pelo professor e na recepção passiva das informações pelos alunos, a Aprendizagem Baseada em Projetos apresenta-se como uma metodologia que envolve os alunos em tarefas e desafios para a solução de um problema ou desenvolvimento de um projeto que vincule os conhecimentos apreendidos na sala de aula (teoria) com a realidade da vida cotidiana (prática).

A perspectiva de projetos possibilita aos alunos lidar com questões interdisciplinares, tomar decisões e agir em sozinhos ou em equipe uma vez que tornam-se protagonistas na construção do conhecimento por meio do livre desenvolvimento de suas habilidades, do pensamento crítico e criativo e na percepção de que existem várias maneiras de realizar uma tarefa, competências tidas como necessárias para o século XXI (BACICH, L.; MORAN, J., 2018).

A inserção de práticas que vão além de aulas expositivas é uma ferramenta que auxilia o professor no processo de ensino com vistas a superar as dificuldades de aprendizagem dos alunos. Muitas discussões em torno dessas práticas são feitas no âmbito da educação matemática, como o uso de materiais (CRISOSTOMO, E.; JANUARIO, G.; LIMA, K. 2017), informática (BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G., 2001) entre outros.

Este artigo apresenta uma proposta de atividade que concorda com o uso de ferramentas para o ensino da matemática (FIRMINO, G. L.; SIQUEIRA, A.M. O., 2017). Inicialmente, discorreremos sobre as metodologias ativas, focando na Aprendizagem Baseada em Projetos que é uma das várias vertentes de aplicação dessa teoria. Posteriormente, discutimos as definições das cônicas sob o ponto de vista de lugar geométrico e em seguida suas propriedades reflexivas, abordando apenas o que for indispensável para compreensão do funcionamento das propriedades, uma vez que nosso foco principal está na metodologia de ensino aplicada e não no tema por si só. Por fim, apresentaremos alguns encaminhamentos metodológicos e os resultados obtidos.

Metodologias Ativas e Aprendizagem Baseada em Projetos

No atual contexto do século XXI as demandas sociais não são apenas para o acesso à educação, mas que essa educação seja de qualidade e garanta a efetiva aprendizagem e o desenvolvimento

de competências dos alunos com vistas a prepará-los para a vida e não apenas para o mundo do trabalho, isto é, cidadão críticos, reflexivos, humanos e protagonistas de suas próprias história. Nesse cenário as Metodologias Ativas têm se apresentado como alternativas de superação à uma educação centrada estritamente na figura do professor como expositor do conhecimento e do aluno como receptor passivo dos conteúdos num mecanizado de estímulo-resposta, tornando muitas vezes o processo educativo inócuo, enfadonho e sem significado para ambas as partes envolvidas.

As Metodologias Ativas apresentam-se como estratégias de ensino focadas na participação efetiva dos estudantes na construção do conhecimento, de forma flexível, interligada e híbrida, com o desenvolvimento direto, participativo e reflexivo do aluno em todas as etapas do processo educativo sob a orientação e acompanhamento pedagógico do professor, como por exemplo, a aprendizagem baseada em projetos (BACICH, L. ; MORAN, J., 2018).

Como uma das possibilidades de aplicação das Metodologias Ativas temos a Aprendizagem Baseada em Projetos que é uma estratégia de aprendizagem em que os alunos se envolvem com tarefas e desafios para resolver um problema ou desenvolver um projeto que tenha ligação com a sua vida fora da sala de aula. Essa abordagem adota o princípio da aprendizagem colaborativa, baseada no trabalho coletivo, que contribui para o desenvolvimento de competências cognitivas e socioemocionais e mobilizam competências e habilidades dos alunos em todas as etapas e atividades, desde o planejamento até à finalização.

Na perspectiva da Aprendizagem Baseada em Projetos o professor abandona a figura de um simples transmissor dos conteúdos e explicador de teorias para adotar uma postura mediadora na construção do conhecimento, organizadora do planejamento das aprendizagens e orientadora do trabalho colaborativo.

Na Aprendizagem por Projetos a avaliação acontece durante o processo e não apenas em um momento estanques como provas e exames, mas numa perspectiva formadora por meio do acompanhamento dos alunos em suas interações com seus pares, sem perder de foco o alcance das competências e habilidades previstas para os alunos no planejamento das atividades.

As Cônicas e suas Propriedades

As seções cônicas, ou simplesmente cônicas, são estudadas desde os tempos antigos. A propósito, a definição atual consta de um tratado de Apolônio de Perga (262-190 a.C. aproximadamente), intitulado “As Cônicas” (BOYER, 2012). Mas sem dúvida a maior

notoriedade da aplicação de tal ferramenta é devido a Galileu (1564-1640) que em 1604 concluiu que a trajetória da bala de um canhão descreve uma parábola, bem como a Johannes Kepler e Isaac Newton que em seus estudos descobriram que as órbitas planetárias são elípticas. No entanto, as aplicações vão muito além de lançamento de projétil e estudo das órbitas. Tais aplicações são encontradas na construção de teatros, conchas acústicas, abóbadas, faróis e antenas parabólicas, refletores, telescópios, fornos solares, iluminação, radares, etc. Muitas dessas aplicações são devidas às propriedades reflexivas das cônicas, por exemplo as antenas parabólicas e os fornos solares, dentre muitas outras.

As cônicas são objetos matemáticos comumente estudados em cursos de Geometria Analítica. Sua definição, em geral, é dada a partir de dois pontos de vista: interseção de um plano com um cone e como lugar geométrico de pontos. As cônicas são divididas entre circunferência, parábola, elipse e hipérbole, sendo que para o nosso interesse não faremos menção da circunferência.

Sejam duas retas e e g concorrentes em O e não perpendiculares. Conservemos fixa a reta e e façamos g girar 360° em torno de e mantendo constante o ângulo entre as retas. Nessas condições, a reta g gera uma superfície cônica circular infinita formada por duas folhas separadas pelo vértice O . A reta g é chamada geratriz da superfície cônica, e a reta e , eixo da superfície. Chama-se seção cônica, ou simplesmente cônica, o conjunto de pontos que formam a interseção de um plano com a superfície cônica.

Esta definição justifica a nomenclatura “cônica”, mas obter expressões algébricas e identificar os elementos principais das cônicas a partir dela pode se tornar um tanto quanto trabalhoso. Sendo assim, apresentamos a seguir as definições para a parábola, para a elipse e para a hipérbole do ponto de vista de lugar geométrico (WINTERLE, 2014).

A parábola é o conjunto dos pontos de um plano que são equidistantes a uma reta fixa, chamada de *diretriz*, e um ponto fixo fora da reta, chamado *foco*. A reta que passa pelo foco e é perpendicular à reta diretriz é chamada *eixo da parábola* e o ponto médio entre o foco e o ponto de interseção da reta diretriz com o eixo é chamado *vértice da parábola*.

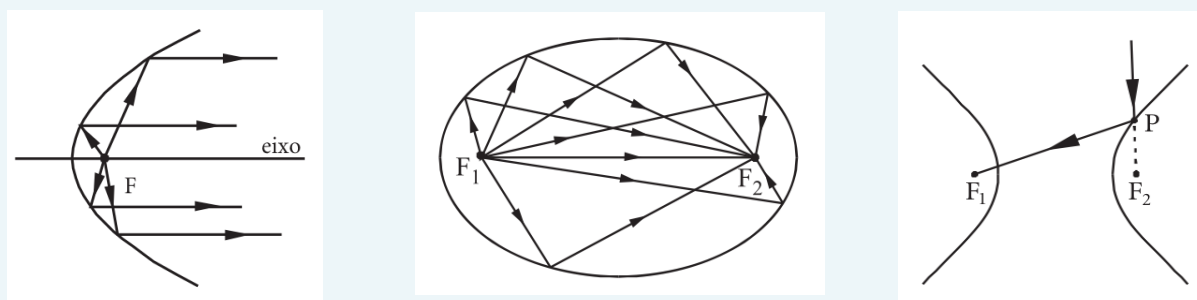
A elipse é o conjunto dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos, chamados *focos da elipse*, é constante e essa constante é maior que a distância entre os focos.

A hipérbole é o conjunto dos pontos de um plano tais que o valor absoluto da diferença das distâncias a dois pontos fixos, chamados *focos da hipérbole*, é constante e essa constante é menor que a distância entre os focos.

A reflexão de uma reta em relação a uma curva é definida a partir do Princípio da Reflexão. Este princípio, que se aplica a raios de luz, ondas eletromagnéticas, sonoras e de calor, entre outros, estabelece que dada uma superfície refletora os ângulos de incidência e reflexão são iguais. Tendo em mente este princípio, definimos a reflexão de uma reta (ou segmento de reta) num ponto P qualquer da curva como sendo outra reta na qual o ângulo de incidência em relação à reta tangente que passa por P é igual ao ângulo de reflexão. A partir da definição de reflexão de uma reta em relação a uma curva, podemos enunciar as propriedades reflexivas das cônicas.

1. Parábola: Uma reta que incide na parábola paralelamente ao eixo da parábola (ou perpendicularmente à diretriz) reflete no foco da parábola. Sob outra perspectiva, um reta que passa pelo foco da parábola é refletida paralelamente ao eixo da parábola;
2. Elipse: Uma reta que passa por um dos focos, digamos foco 1, é sempre refletida no outro foco, digamos foco 2;
3. Hipérbole: Uma reta que incide na hipérbole na direção de um dos focos, digamos o foco 1, é sempre refletida no outro foco.

Figura 2. Propriedades Reflexivas das Cônicas.



Fonte: WINTERLE, 2014.

Metodologia

As propriedades reflexivas das cônicas têm aplicações que são bastante exploradas fora do ambiente acadêmico matemático, como é o caso da antena parabólica, que já traz no nome a identificação com a parábola. Trata-se na verdade de um sólido de revolução, mas que mantém as mesmas propriedades reflexivas da parábola. Considerando que os sinais chegam à antena paralelos ao eixo da parábola, estes são refletidos para o foco, onde é colocado um receptor de sinal. Dessa forma, os raios ficam concentrados em um único ponto, amplificando assim o sinal recebido.

Em relação à elipse, uma aplicação dessas propriedades pode ser verificada nos refletores odontológicos. Como o grande objetivo desses aparelhos é concentrar o máximo de luz, sem que essa luz cause desconforto para o tratamento dentário do paciente, coloca-se uma fonte de luz em um dos focos da elipse (elipsoide, para ser mais preciso) de modo que, ao refletir na superfície elíptica espelhada, os raios de luz são refletidos para o outro foco.

Há outras aplicações que não comentaremos o funcionamento, como é o caso dos telescópios, que se utilizam das propriedades da parábola e da hipérbole simultaneamente, dos faróis de automóveis, do fogão solar ou simplesmente de uma sinuca elíptica, que embora não tão popular, é desenvolvida a partir de tais propriedades.

Diante de tantas aplicações que fazem parte do cotidiano, foi elaborada uma atividade que teve por objetivo estimular o aluno a verificar a validade de tais propriedades na prática, fixando o conteúdo dado de forma teórica. Para tal, foi aplicada a metodologia de Aprendizagem Baseada em Projetos. Essa intencionalidade pedagógica em estimular a prática dos alunos deriva-se da concepção de que, quando o aluno participa ativamente do processo de construção do conhecimento sua aprendizagem é duradoura e não superficial.

Além da aprendizagem dos conceitos, a Aprendizagem Baseada em Projetos estimula a criatividade, a autonomia e o protagonismo dos estudantes desenvolvendo competências e habilidades para além dos conceitos e conteúdos matemáticos apreendidos, como por exemplo: inovar, colaborar e compartilhar (saberes e experiências).

Na perspectiva da Aprendizagem Baseada em Projetos, em sala de aula foram apresentadas as propriedades reflexivas das cônicas sem a verificação prática ou teórica das mesmas por parte do professor. Nesse momento, foi destacado a aplicabilidade do tema, conforme descrito anteriormente neste texto. Dividiu-se a turma em três grupos, a fim de que criar três projetos de modo que cada um dos projetos abordariam uma aplicação de um cônica distinta.

A partir daí, os alunos iniciaram um trabalho de pesquisa sobre possibilidades de aplicações. Não simplesmente aplicações gerais, mas aplicações que pudessem ser reproduzidas por eles próprios envolvendo materiais e tecnologia acessíveis, de modo que eles participassem ativamente do processo e forma autônoma.

Tendo definido a aplicação, iniciou-se o processo de produção da ferramenta onde se verificaria tais propriedades (VALE, I., 1999). Durante este processo, foi indispensável o acompanhamento do professor mais de perto, para garantir que a ferramenta produzida realmente possuía as características matemáticas da cônica em questão, para que a validade da propriedade na ferramenta produzida fosse transferida para o objeto matemático. Mais ainda, para evitar que,

em caso de falha por descuido na produção, não houvesse dúvidas da validade da propriedade para o objeto matemático.

Para execução dos projetos, os alunos precisaram se encontrar fora do ambiente de aula para confecção do produto final. O acompanhamento do desenvolvimento foi feito de forma semanal. Em todas as aulas o professor questionava os alunos quanto ao desenvolvimento do projeto. Tendo em vista que alguns alunos não poderiam se reunir presencialmente com o restante do grupo, devido a limitações (alguns já trabalhavam), fez-se necessário disponibilizar algumas aulas para que os grupos pudessem resolver algumas demandas.

Foi gerado um relatório com detalhes dos projetos como: material utilizado, metodologia empregada, divisão de tarefas e outras particularidades que estão associadas a escolha da aplicação. Por fim, os projetos foram compartilhados com a turma por meio de apresentação, para que os demais alunos tivessem acesso a tal aplicação e com isso entendessem melhor o funcionamento da propriedade reflexiva da cônica utilizada no projetos.

Resultados

Três projetos foram desenvolvidos pela turma, onde dois se utilizaram da propriedade reflexiva da parábola e um da elipse. O grupo responsável pela propriedade reflexiva da hipérbole acabou desistindo do projeto. Em contra partida, o grupo que ficou responsável pela elipse ficou tão empolgado com o resultado que desenvolveu um segundo projeto para as propriedades reflexivas da parábola.

Projeto 1: Refletor parabólico

O material utilizado no projeto foi uma antena parabólica, 8 metros de fita espelhada e cola quente. Devido o uso da cola quente para fixar o espelho na antena, certos pontos da fita ficaram mais elevados, o que resultou em uma perda na precisão da reflexão, gerando um foco maior do que o esperado. Entretanto, ainda assim foi possível identificar uma alta temperatura nesse ponto de foco, atingindo assim o objetivo.

Figura 3 - Antena parabólica revestida com fita espelhada



Fonte: Acervo do autor.

Projeto 2: Mesa parabólica

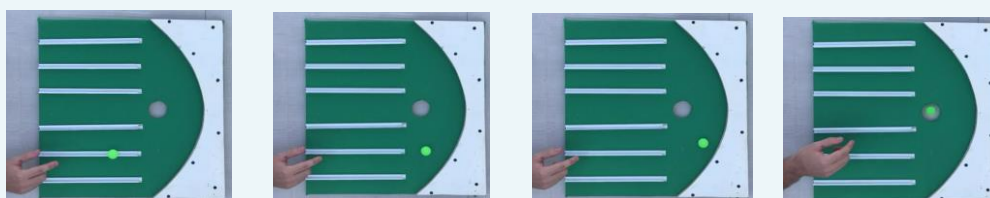
Este projeto foi elaborado sem uso de material previamente fabricado, como foi o caso do projeto 1 que utilizou uma antena parabólica. Neste caso, o principal material utilizado foi madeira, que foi manipulada pelos próprios alunos. Além disso, um tecido e canaletas para garantir que o objeto lançado de fato incidisse na parábola perpendicularmente à reta diretriz. A Figura 4 mostra fotos do resultado final do projeto, enquanto que a Figura 5 são *prints* de um vídeo produzido para verificação do bom funcionamento do dispositivo.

Figura 4 - Mesa parabólica.



Fonte: Acervo do autor.

Figura 5 - Prints extraídos de um vídeo do dispositivo sendo testado.



Fonte: Acervo do autor

Projeto 3: Sinuca elíptica

Este projeto foi elaborado nos mesmos termos do projeto 2, com a ressalva de que neste caso, trata-se de uma sinuca elíptica.

Figura 6 - Propriedades reflexivas das cônicas.



Fonte: Acervo do autor

Como o nome sugere, uma sinuca elíptica possui as “mesmas regras” de jogo que uma sinuca retangular, com algumas alterações notáveis, como o formato da mesa e a quantidade de caçapas.

Conclusão

É sabido que a matemática está presente nas mais variadas áreas. No entanto, nem sempre é imediata a identificação de sua atuação. Muitas vezes o conteúdo estudado em sala de aula é apenas uma ferramenta utilizada de uma forma intermediária que não necessariamente aparece na aplicação final. Como é o caso de vetores no plano e no espaço, que é objeto de estudo da Geometria Analítica, mas que tem a sua aplicação mais imediata em grandezas físicas vetoriais (força, velocidade, aceleração e etc). Este cenário representa um desafio na apresentação de muitos temas da matemática uma vez que, como o aluno não tem acesso a uma aplicação imediata do conteúdo, isso se torna desmotivador.

Todavia, quando os alunos se envolvem na realização prática da atividade a aprendizagem se torna significativa fazendo com que a motivação flua naturalmente e evolua para novas descobertas e produção de conhecimentos para além do que havia sido inicialmente planejado.

Propor atividades práticas de aplicação imediata é um recurso que auxilia na superação do desafio de manter o aluno sempre estimulado. A atividade em questão, descrita neste artigo, despertou nos alunos o interesse em pesquisar e obter maiores informações sobre o funcionamento de objetos que fazem parte do cotidiano, como é o caso da antena parabólica. Mais ainda, a busca por entender melhor as propriedades reflexivas das cônicas e sua importância resultou por exemplo no “descobrimento” de uma situação no mínimo curiosa,

onde um prédio projetado com uma fachada em formato parabólico causou transtorno refletindo o sol em alta temperatura em alguns pontos em frente ao prédio (Como descrito no Projeto 1). Esta situação chamou a atenção dos alunos para a importância de se ter domínio das ferramentas utilizadas.

Por meio da Aprendizagem Baseada em Projetos os alunos perceberam que a matemática está presente de maneira relevante no nosso cotidiano e que a aparição é verificada em situações e objetos que vão além de operações numéricas básicas ou formas geométricas. Muito embora a atividade tenha sido aplicada em uma disciplina específica, foi possível notar que os alunos tornaram-se mais acessíveis à outras disciplinas de matemática, impactando de maneira direta o processo de formação.

Referências

- ALMEIDA, L.M.W., FATORI, L.H., SOUZA, L.G.S. **Ensino de Cálculo: uma abordagem usando Modelagem Matemática**. RCT. v. 10, n. 16, 2007.
- BACICH, Lilian; MORAN, José (Orgs.). Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018. 238 p.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 2ª ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2001.
- BOYER, C. B. **História da matemática**. 3ª ed. São Paulo. Editora Blücher, 2012.
- CRISOSTOMO, E.; JANUARIO, G. ; LIMA, K. **Relação professor-materiais curriculares em Educação Matemática: análise de alguns resultados de pesquisas**. Educação Matemática em Revista, Brasília, v. 22, n. 53, p. 62-74, jan./mar. 2017.
- FIRMINO, G. L.; SIQUEIRA, A.M. O. **A matemática no ensino de engenharia**. The Journal of Engineering and Exact Sciences - JCEC, v. 03, n. 03, p. 331-345, 2017.
- LUCKESI, Cipriano Carlos. Avaliação em Educação: questões epistemológicas práticas. São Paulo: Cortez, 2018.
- TREVISAN, A.; TAVARES, M. M. **Possibilidades para matematizar em aulas de Cálculo**. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia. 6. 10.3895/S1982-873X2013000100008, 2013.

VALE, I. **Materiais manipuláveis na sala de aula: o que se diz, o que se faz.** In APM (Eds), Actas do ProfMat 99. Lisboa: APM, p. 111-120, 1999.

WINTERLE, P. **Vetores e geometria analítica.** 2ª. ed. São Paulo. Editora Pearson, 2014.

SOBRE O(A/S) AUTOR(A/S)

Enéas Mendes de Jesus

Mestre em Matemática, Universidade Federal do Espírito Santo (UFES); Instituto Federal do Espírito Santo, Campus Piúma - Brasil. E-mail: eneas.jesus@ifes.edu.br

Solon Gomes de Sousa

Mestre em Matemática, Universidade Federal do Espírito Santo (UFES); Universidade do Estado da Bahia (UNEB/DEDC X), campus Teixeira de Freitas – Brasil. E-mail: solonsousa@uneb.br