



ISSN: 2175-5493

VIII COLÓQUIO DO MUSEU PEDAGÓGICO

09 a 11 de setembro de 2009

O PROCESSO DE SIMBOLIZAÇÃO DA NOÇÃO DE IGUALDADE E A UTILIZAÇÃO DO SÍMBOLO “=” ANTES DE SER CONVENCIONADO COMO SÍMBOLO DE IGUALDADE *

José Dilson Beserra Cavalcanti **
(UFRB)

Marcelo Câmara dos Santos ***
(UFPE)

RESUMO

Nesse artigo apresentamos algumas considerações, em uma perspectiva histórica, do processo de simbolização da noção de igualdade e a uso do símbolo “=”. Tentaremos demonstrar a diversidade de símbolos que foram designados como sinais de igualdade bem como a utilização do símbolo “=” para outros propósitos não concernentes com a noção de igualdade. Dessa maneira, nosso trabalho discute a convenção e universalização do símbolo “=” para designar sinal de igualdade como um processo longo e complexo.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática; Simbolização; Igualdade.

* Essa comunicação é uma versão inspirada em CAVALCANTI, José Dilson Beserra e CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. A saga do sinal de igualdade: mais de 450 anos de história. *Educação Matemática em Revista* (São Paulo), v. 25, p. 33-36, 2008.

** Professor da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia-UFRB; membro do colegiado de Matemática representando a área de Educação Matemática; Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco. E-mai: dilsoncavalcanti@gmail.com.

*** Professor do Colégio de Aplicação e do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnologias-UFPE. Doutor em Educação pela Université Paris X. E-mail: marcelocamaraufpe@yahoo.com.br



ISSN: 2175-5493

VIII COLÓQUIO DO MUSEU PEDAGÓGICO

09 a 11 de setembro de 2009


INTRODUÇÃO

História do sinal de igualdade

É difícil pensarmos em Matemática sem a noção de igualdade sendo representada pelo símbolo "=", em outros termos, sem o "=" como sinal de igualdade. Contudo, a igualdade foi representada, ao longo dos tempos, de diferentes maneiras e por diferentes símbolos e a universalização do símbolo "=" como sinal de igualdade não foi imediata.

Antes de iniciarmos nosso estudo sobre a história do sinal de igualdade esclarecemos que, no desenvolvimento histórico da Álgebra, notam-se as seguintes periodizações: Álgebra Retórica; Álgebra Sincopada e Álgebra Simbólica. A primeira referente à utilização da linguagem vernácula da época paleobabilônica (entre 2000 e 1600 a.C.); a segunda representada também por esse tipo de linguagem, porém, com alguns termos técnicos escritos na forma de abreviaturas; a terceira relativa à substituição das palavras e abreviaturas por sinais simbólicos e pela introdução do uso sistemático de letras para representar valores desconhecidos (PUIG, 1998).

Em relação à maneira como a igualdade foi expressa ao longo dos tempos, podemos dizer que aconteceu algo semelhante. A igualdade já foi expressa retoricamente por palavras, tais como: *aequales*, *aequantur*, *esgale*, *faciunt*, *fera egale*, *phalam*, *ghelijck*, ou *gleich* (CAJORI, 1993; BOYER, 1974; CONTADOR, 2006); por abreviações como *aeq* para *aequales* ou *aequantur*, e, *pha* para *phalam*; e, por diferentes símbolos.

Cajori (1993) indica que podemos encontrar no papiro de Rhind¹⁷³, um símbolo semelhante a este  significando "it gives" (dá), classificando-o

173 Papiro egípcio datado de aproximadamente 1620 a.C., conhecido também como papiro de Ahmes.

VIII COLÓQUIO DO MUSEU PEDAGÓGICO

09 a 11 de setembro de 2009

praticamente como uma marca para igualdade em uma equação linear. Na aritmética do manuscrito Bakhshālī¹⁷⁴, encontra-se, a contração *pha* (para phala) para indicar o resultado de uma operação, assim, “pha serve como um sinal de igualdade” (CAJORI, 1993, p. 79).

Conforme Cajori (ibid), vários matemáticos utilizaram, regularmente, símbolos como sinais de igualdade. Diofanto¹⁷⁵ utilizou um símbolo semelhante a este \sqcap ; Já o símbolo \curvearrowright foi utilizado por al-Qalasâdī¹⁷⁶; Regiomontanus¹⁷⁷ utilizou um travessão horizontal — , assim como foi utilizado, posteriormente na Itália, por Luca Pacioli¹⁷⁸, Ghaligai¹⁷⁹, e outros. Entretanto, Pacioli utiliza o travessão para vários propósitos, além do de expressar igualdade, e Ghaligai expressava a igualdade por travessões (— — —); um único travessão (—) era utilizado também para separar fatores.

A repetição de um símbolo, simplesmente para preencher um intervalo, é encontrado muito tempo depois em conexão com o sinal de igualdade (=). “Assim, John Wallis¹⁸⁰, em sua *Mathesis universalis* ([Oxford, 1657], p. 104) escreve: $1 + 2 - 3 = = = 0$ ” (CAJORI, 1993, p. 113). Já Gerolamo Cardano¹⁸¹, por sua vez, deixava algumas vezes, um espaço em branco no lugar onde colocamos, comumente, o sinal de igualdade (CAJORI, 1993).

174 Manuscrito datado aproximadamente de 400 d.C., encontrado por um agricultor próximo da aldeia Bakhshālī, na Índia. *The Bakhshālī Manuscript*, Indian Antiquary, Vol. XVII (Bombay, 1988). (nota de CAJORI, 1993).

175 Matemático grego que viveu, segundo alguns autores, em torno de 250 d.C

176 Matemático árabe (1412-1486).

177 Johannes Müller von Königsberg, Matemático e astrônomo alemão (1436-1476), comumente chamado de Regiomontanus.

178 Monge franciscano e célebre matemático italiano (1445-1517)

179 Matemático italiano (?-1536), conforme Heefffer (2004)

180 Matemático inglês (1616-1703)

181 Matemático, físico e médico italiano (1501-1576)

O sinal de igualdade, como o conhecemos atualmente, pelo símbolo "=", só foi introduzido em 1557, pelo inglês Robert Recorde¹⁸² em seu livro *The Whetstone of Witte*¹⁸³, que é considerado o primeiro tratado inglês sobre Álgebra.

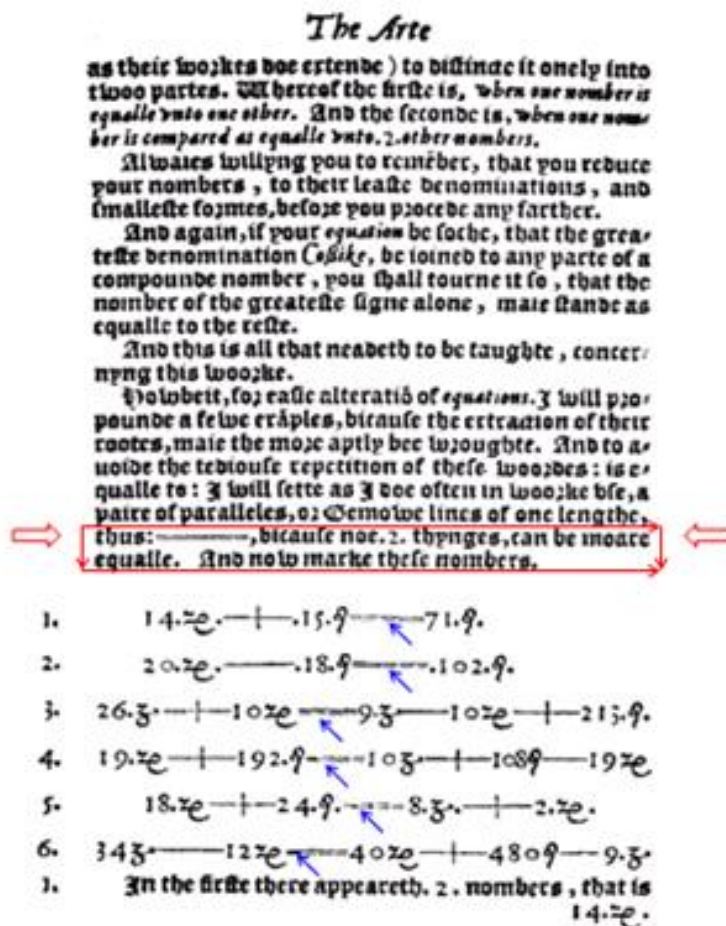


Figura 1 - Página do livro *The Whetstone of Witte* na qual aparece o símbolo "=" um pouco mais alongado

182 Robert Recorde (1510-1558) foi um dos mais importantes matemáticos do século XVI. Também foi jurista e médico do rei Edward VI e da rainha Mary.

183 A pedra de afiar o conhecimento.

VIII COLÓQUIO DO MUSEU PEDAGÓGICO

09 a 11 de setembro de 2009

A figura 01, acima, corresponde à página do livro de Recorde na qual aparece pela primeira vez, o símbolo moderno de igualdade. Observe que o símbolo “=” que utilizamos atualmente é uma versão ligeiramente menos longa do símbolo inventado por Recorde.

Cajori (1993) explica que nos livros impressos antes da introdução do símbolo de Recorde, a igualdade era expressa por algumas das palavras citadas anteriormente, ou pela forma abreviada *aeq.* Segundo Contador (2006), *Recorde* utilizou o símbolo “=” com o objetivo de substituir *aequales* (empregada desde 1500) ou sua forma abreviada *aequ* (empregada a partir de 1550).

Observando a figura 01, as setas indicam o símbolo “=” e o trecho em destaque corresponde à justificativa de Recorde ao escolher esse símbolo para igualdade: “*bicause noe .2. thynges, can be moare equalle* (Por que duas coisas não podem ser mais iguais).

As expressões que aparecem na figura 01, conforme Meavilla (2001), são traduzidas para o simbolismo moderno da seguinte maneira:

1. $14x + 15 = 71$
2. $20x - 18 = 102$
3. $26x^2 + 10x = 9x^2 - 10x + 213$
4. $19x + 192 = 10x^2 + 108 - 19x$
5. $18x + 24 = 8x^2 + 2x$
6. $34x^2 - 12x = 40x + 480 - 9x^2$

Recorde introduziu o símbolo “=” como sinal de igualdade no capítulo dedicado à resolução de equações algébricas, com a finalidade de facilitar a



ISSN: 2175-5493

VIII COLÓQUIO DO MUSEU PEDAGÓGICO

09 a 11 de setembro de 2009

manipulação que ocorre no processo de resolução das equações, evitando, assim, a repetição tediosa da expressão “*is equalle to*”¹⁸⁴.

O sinal de igualdade está associado, de certo modo, com a manipulação das equações, possibilitando assim trabalhar com a combinação de operações no decorrer do processo de resolução. Essas operações correspondem à adição e subtração dos termos homogêneos em ambos os lados da equação, à divisão e multiplicação de uma equação por uma incógnita (introduzida por Cardano), e, à adição e subtração de duas equações (introduzido por Cardano e aperfeiçoado por Peletier e Buteo) (HEEFFER, 2004; 2007). Dessa maneira, Heeffer (2004) afirma, então, que “o sinal de igualdade simboliza a equação algébrica” (p. 17).

Em outro estudo, Heeffer (2007) argumenta que o conceito de equação emergiu totalmente em 1560, aproximadamente. Este autor também afirma que os símbolos são introduzidos em consequência do pensamento simbólico. Dessa maneira, a invenção e utilização do símbolo de igualdade fornecem evidência histórica da introdução de um símbolo representando um conceito matemático recentemente emerso (HEEFFER, 2007).

A introdução do sinal de igualdade como símbolo de equação conclui o estágio básico do desenvolvimento em direção à Álgebra simbólica, como iniciado na Alemanha até ao fim do décimo quinto século (HEEFFER, 2007). Heeffer (ibid.) realça ainda, que “o tempo da introdução do sinal de igualdade “=”, em 1557, coincide perfeitamente com as nossas análises conceituais dos manuais de Álgebra do décimo sexto século” (p. 18). Assim, este autor referiu-se ao sinal de igualdade, representado pelo símbolo “=”, como a jóia da coroa da Álgebra simbólica.

Outros significados do símbolo “=”

¹⁸⁴ É igual a.



ISSN: 2175-5493

VIII COLÓQUIO DO MUSEU PEDAGÓGICO

09 a 11 de setembro de 2009

Já foi discutido sobre a diversidade de símbolos utilizados para designar a noção de igualdade antes de Recorde utilizar o símbolo “=” como sinal de igualdade. Por outro lado, o símbolo “=” nem sempre foi designado assim. De fato, o símbolo “=” foi utilizado por outros matemáticos do continente europeu para outras finalidades que não correspondiam a um sentido compatível com o de sinal de igualdade.

Em 1951, François Viète¹⁸⁵ utilizou o “=” para designar uma diferença aritmética. Já Descartes¹⁸⁶, em 1638, utilizou-o para designar o sentido de *mais ou menos*, hoje representado pelo símbolo “±”. Juan Caramuel¹⁸⁷ empregou o símbolo “=” como sinal de separação em frações decimais, como por exemplo, o que para nós hoje em dia se expressa como 102,857, ele expressava como 102=857. Georg Heinrich Paricius¹⁸⁸, em 1706, fez uso dos símbolos, “=”, “:”, “e -”, como símbolos gerais para separar números que ocorrem num processo de resolver problemas aritméticos. Samuel Reyher¹⁸⁹, em 1698 usou o “=” para designar linhas paralelas. Dessa maneira, o símbolo “=” adquiriu cinco utilizações diferentes entre alguns escritores do continente europeu (CAJORI, 1993).

Pelo que discutimos até o momento, podemos destacar que nem sempre a igualdade foi representada pelo símbolo “=” e, tampouco, o símbolo “=” sempre foi utilizado como sinal de igualdade.

A saga da universalização do símbolo “=” como sinal de igualdade

185 Matemático e advogado francês (1540-1603)

186 Filósofo cientista e matemático francês (1596 –1650)

187 Filósofo, matemático, lógico e lingüista espanhol (1606-1682)

188 Matemático alemão (1675-1725)

189 Matemático e astrônomo alemão (1635-1714)



ISSN: 2175-5493

VIII COLÓQUIO DO MUSEU PEDAGÓGICO

09 a 11 de setembro de 2009

Um fato curioso é que, a propagação da utilização do símbolo “=” como sinal de igualdade, não aconteceu de maneira imediata, nem tampouco, sem complicações. Observamos que, mesmo depois de Recorde utilizar o símbolo “=” como sinal de igualdade, em 1557, durante os séculos XVI e XVII não houve um consenso a propósito da utilização de um único símbolo para designar igualdade. Isto é, paralelamente, os matemáticos europeus utilizavam diferentes símbolos para igualdade (CAJORI, 1993).

Uma possível razão para o símbolo “=” não se popularizar imediatamente, como sinal de igualdade, é o fato de ele ter sido utilizado para diferentes finalidades assumindo, assim, outros significados não associados à noção de igualdade, como discutimos no tópico anterior. Nesse sentido, Cajori (op. cit.) esclarece que o símbolo “=” esteve ameaçado de ser descartado completamente, como sinal de igualdade, em favorcimento de algum outro símbolo que não apresentasse tal desvantagem. Apresentamos, em seguida, um breve resumo no qual aparecem alguns dos símbolos utilizados por distintos matemáticos europeus no decorrer dos séculos XVI e XVII.

Por exemplo, na França, em 1559, Buteo¹⁹⁰ utilizou o símbolo “[” como sinal de igualdade. Na Alemanha, em 1571, **Willhelm Holzmann**¹⁹¹ utilizou linhas paralelas “||” verticais para representar igualdade, na versão da aritmética da obra de Diofanto. Já Leonard e Thomas Digges¹⁹², em 1579, na Inglaterra, inventaram um novo símbolo para igualdade “ ⌘ ”, que parece ser uma variação do símbolo de Recorde.

No decorrer do século XVII, os matemáticos também inventaram diferentes símbolos para igualdade. Hérigone¹⁹³ inventou, em 1634, o símbolo “2|2”, empregando-o em sua obra *Cursus mathematicus*. Hérigone também utilizou “3|2” e

190 Matemático francês, conforme alguns autores (nasceu em 1492 e faleceu entre 1564 e 1572)

191 Também conhecido como **Xylander** (1532-1576), Primeiro a traduzir a obra, Aritmética, de Diofanto

192 Matemáticos e cientistas ingleses. Pai e filho, (1520-1559) e (1546-1596), respectivamente.

193 Matemático e astrônomo francês (1580-1643)



ISSN: 2175-5493

VIII COLÓQUIO DO MUSEU PEDAGÓGICO

09 a 11 de setembro de 2009

“2|3” no sentido de “maior que” e “menor que”, respectivamente. Apesar de esses símbolos apresentarem uma lógica atraente, Hérigone, ciente do potencial das possíveis confusões que estes ocasionariam, em outra parte do *Cursus mathematicus*, acaba utilizando o símbolo “ \sqsubset ” para expressar igualdade.

O símbolo “ \propto ”, inventado por René Descartes em 1637, aparece em seu célebre trabalho *Géométrie como sinal de igualdade*. Ressaltamos que este símbolo teve uma grande repercussão em sua época. O símbolo “ \sqsupset ”, que parece uma inversão do símbolo utilizado por Hérigone, foi utilizado por **F. Dulaurens** em **1667 na obra *Specimina mathematica***. Na obra *Mathesis biceps vetus et nova, escrita por Juan Caramuel* em 1670, a igualdade aparece representada pelo símbolo “ \mathcal{A} ”, que indica uma possível associação das duas primeiras letras da palavra latina *æqualis* que, designa igualdade.

Na edição de 1679 do trabalho de Fermat¹⁹⁴, *Varia opera mathematica*, o símbolo “ ∞ ” parece sugerir o sentido de igualdade, contudo, ele não o utiliza em seus manuscritos, sendo que nas margens dessa obra aparece o símbolo “ $\{$ ” parecendo também denotar igualdade (CAJORI, 1993).

Como vimos, diversos símbolos concorreram com o símbolo “=” para representar igualdade. Mas, a grande rivalidade pela popularização de um símbolo para o posto de sinal de igualdade foi, na verdade, entre o símbolo “=” proposto por Recorde e o símbolo “ \propto ”, utilizado por Descartes em 1637. Sobre o símbolo de igualdade de Descartes, *alguns especulam que ele é uma inversão e alteração da combinação das primeiras letras da palavra æqualis. Uns mais pragmáticos sugerem que, em uma publicação astronômica, esse símbolo foi utilizado para representar a palavra Taurus* (CAJORI, 1993). Em Cajori (ibid, pp. 299-307), discute-se, de maneira

194 Matemático francês (1601-1665)



ISSN: 2175-5493

VIII COLÓQUIO DO MUSEU PEDAGÓGICO

09 a 11 de setembro de 2009

pormenorizada, os aspectos sobre a “competitividade” dos símbolos para o “posto” de sinal de igualdade.

Em linhas gerais, foi apenas no século XVII, especificamente em 1631, que o símbolo de Recorde recebeu o reconhecimento mais geral na Inglaterra, sendo adotado como símbolo para igualdade em três importantes trabalhos: *Artis Analyticae Práxis*, de Thomas Harriot¹⁹⁵; *Clavis Mathematicae*, de William Oughtred¹⁹⁶; e *Trigonometria* de Richard Norwood¹⁹⁷ (CAJORI, 1993). Contudo, a aceitação e universalização do símbolo de Recorde como sinal de igualdade, demonstrando “a vitória final do = sobre \propto parece dever-se, principalmente, à influência de Leibniz¹⁹⁸, durante o período crítico no fim do século XVII” (CAJORI, 1993, p. 306).

CONCLUSÕES

Na Matemática, pode-se dizer que unido a um conceito há um nome na língua natural, e, um símbolo para representá-lo. Essa conceitualização, nomeação, e simbolização da atividade dos matemáticos não aconteceu imediatamente, mas com o passar dos séculos (SÁENZ-LUDLOW & WALGAMUTH, 1998). Contudo, os estudantes de Matemática são aculturados na Matemática da escola tendo que aceitar os símbolos convencionais já no lugar com seus significados atuais.

Embora, não seja comum questionar a utilização do símbolo “=” como sinal de igualdade, de maneira que é até difícil pensarmos em Matemática sem o símbolo “=” denotando igualdade, podemos dizer que a saga do símbolo “=”, utilizado por Recorde

195 Matemático e astrônomo inglês (1560-1621)

196 Matemático inglês (1574-1660)

197 Matemático inglês (1590-1675)

198 Filósofo, cientista, matemático e diplomata alemão (1646-1716)



ISSN: 2175-5493

VIII COLÓQUIO DO MUSEU PEDAGÓGICO

09 a 11 de setembro de 2009

em 1557 como sinal de igualdade, até sua aceitação e popularização foi um processo bastante complexo e longo, durando aproximadamente 150 anos.

Além disso, esse processo foi permeado por fatos interessantes de encontros e desencontros entre o símbolo “=” e a noção de igualdade. Se por um lado, a igualdade nem sempre foi representada pelo “=”, por outro, o símbolo “=” já foi utilizado por diversos matemáticos europeus com finalidades diferentes das comumente associadas aos atributos do sinal de igualdade.

Ressaltamos a relevância que o símbolo “=” como sinal de igualdade adquiriu no desenvolvimento da Matemática ao longo dos anos. Nesse sentido, lembramos que, em 2007, o símbolo “=” completou 450 anos de história como sinal de igualdade, sendo importante ressaltar que nesse período o “=” adquiriu status de um símbolo que é indispensável, quer seja para a Matemática, ou para o ensino de Matemática, quer seja para outras Ciências. Nesses termos, o símbolo “=” pode ser considerado como um dos principais símbolos matemáticos já inventados.

Por último, acreditamos que conhecer um pouco da história dos símbolos e conceitos matemáticos pode ser além de útil para o professor organizar seu trabalho, interessante para os alunos compreenderem melhor a natureza da própria Matemática como construção humana.

REFERÊNCIAS

- BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução: Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1974.
- CAJORI, F. A. **History of mathematical notations**: Two volumes bound into one. Originally published: Chicago: Open Court Pub. Co., 1928-1929. New York: Dover Books, 1993.



ISSN: 2175-5493

VIII COLÓQUIO DO MUSEU PEDAGÓGICO

09 a 11 de setembro de 2009

- CONTADOR, P. R. M. **Matemática, uma breve história**. Vol. 01. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2006.
- GARBI, G. G. **A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2006.
- HEEFFER, A. (2004). Récréations Mathématiques (1624) A Study on its Authorship, Sources and Influence, **History of Science Society Annual Meeting**. Austin, Texas, 18-21 November, 2004.
- HEEFFER, A. (2004). The emergence of symbolic algebra as a shift in predominant models. **International Conference - Model-Based Reasoning in Science and Engineering Abduction, Visualization, Simulation**. University of Pavia, Italy. <http://logica.ugent.be/albrecht/thesis/MBR2004.pdf> (lido em outubro de 2007).
- _____, A. On the Nature and Origin of Algebraic Symbolism. **Perspectives on Mathematical Practices - International Conference**. Vrije Universiteit Brussel, Belgium. <http://logica.ugent.be/albrecht/thesis/PMP2007Heeffer.pdf> consultado em: outubro de 2007.
- MEAVILLA, S. V. **Aspectos históricos de las matemáticas elementales**. Zaragoza. Prensas Universitarias de Zaragoza, 2001.
- PUIG, L. (1998). Componentes de una historia del álgebra. El texto de al-Khwarizmi restaurado. In: **Investigaciones en Matemática Educativa II**. México, DF: Grupo Editorial Iberoamérica, págs.109-131.
- RECORDE, R. (1557). **The whetstone of witte [...]**. By I. Kyngston, London.
- SÁENZ-LUDLOW, A., e WALGAMUTH, C. (1998). Third Graders' Interpretation of Equality and the Equal Symbol. **Educational Studies in Mathematics**. 35(2), 153-187.