ISSN: 2175-5493

IX COLÓQUIO DO MUSEU PEDAGÓGICO
5 a 7 de outubro de 2011

ANÁLISE DOS ERROS COMETIDOS POR ALUNOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA EM UMA QUESTÃO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Juliana Rodrigues Ferreira[*]
(UESB)

Roberta D´Angela Menduni Bortoloti[**]
(UESB)

RESUMO
Neste artigo trazemos dados parciais de uma pesquisa interinstitucional, realizada nas quatro Universidades estaduais da Bahia (UESB, UEFS, UESC, UNEB) tendo como foco a análise de erros sobre o conteúdo de análise combinatória. A amostra é composta de 417 estudantes dos cursos de licenciatura em matemática, entretanto analisamos 135 resoluções, de alunos da UNEB, campi Alagoinhas; Barreiras e Teixeira de Freitas e da UESB, campus Vitória da Conquista. Baseamos-nos nas autoras Cury (2008) e Pinto (2000) que pesquisam sobre análise de erros e, Morgado et al (1991), Pessoa e Borba (2010) para um suporte teórico sobre análise combinatória. As principais dificuldades encontradas foram: interpretar e resolver um problema de contagem utilizando a permutação, a combinatória ou o arranjo.

PALAVRAS CHAVE: Análise de erros, Análise combinatória, Formação de professores.

[*] Bolsista de Iniciação Cientifica, UESB, Análise de Erros e a Formação do Professor de Matemática, UESB. E-mail: ju-rodrigues1@hotmail.com

[**] Mestre em Educação, UESB, Análise de Erros e a Formação do Professor de Matemática, FAPESB/UESB, E-mail: robertamenduni@yahoo.com.br

INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta dados parciais da pesquisa interinstitucional "Análise dos erros cometidos por discentes de Cursos de Licenciatura em Matemática das Universidades Estaduais Baianas - PAE" (BORTOLOTI et al, 2007), desenvolvida nas quatro Universidades estaduais (UESB; UESC; UNEB; UEFS)[80] que oferecem o curso de matemática, com a colaboração de professores destas quatro Instituições de Ensino Superior - IES.

Na primeira fase, aplicamos o teste padrão formado por 6 questões que versão sobre os seguintes conteúdos: Função, Conjuntos, Geometria Plana e Análise Combinatória. A segunda fase foi à intervenção, com a realização de oficinas e palestras para discutirmos as dificuldades e erros conceituais, encontrados pela equipe no 1º teste e, a última fase, a aplicação do teste II para avaliarmos o desempenho dos alunos pós-intervenção.

Neste artigo discutiremos parte dos resultados referentes à 1ª fase. Analisaremos uma questão sobre análise combinatória aplicada no 1º teste. Apresentaremos um panorama das estratégias de resolução dos alunos de quatro campi: UNEB, os campi de Alagoinhas; Barreiras e Teixeira de Freitas e UESB, campus de Vitória da Conquista. Objetivamos pontuar se as dificuldades com relação ao conteúdo de análise combinatória, manifestada por eles por meio dos erros cometidos, foram similares entre os campi.

Discutir as dificuldades apresentadas pelos alunos, é uma atividade de fundamental importância para a construção do conhecimento. Utilizamos à análise de erros, uma tendência em educação matemática, para verificarmos as dificuldades e consequentemente alguns erros dos alunos sujeitos da pesquisa

[80] UESB – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia; UESC – Universidade Estadual de Santa Cruz; UNEB – Universidade do estado da Bahia e UEFS – Universidade Estadual de Feira de Santana.

separando os tipos de erros em diferentes categorias, elaboradas pela equipe executora da pesquisa. Para defendermos a idéia de que os erros podem ser trabalhados como metodologia de ensino e de pesquisa nos baseamos em autores como Cury (2008) e Pinto (2000).

Revisão Bibliográfica

Nas palavras de Pinto (2000, p. 21) "o erro é o mais antigo elemento no processo de ensino". Foi através deles que grandes matemáticos fizeram belíssimas descobertas. Foi errando e aprendendo que os mesmos construíram essa ciência exata (a matemática), que hoje representa assombro para muitos alunos.

Se os grandes matemáticos aproveitaram os erros para construir esta ciência, então porque desconsiderá-los na sala de aula? Porque dizer ao aluno que erra "você não sabe o conteúdo"? E se aproveitarmos esses erros, não estaremos ajudando esses alunos a superarem certas dificuldades?

Desta forma estaremos vencendo a idéia de que o erro precisa ser punido ou eliminado no ensino da matemática. Como nos fala Pinto (2000, p.18) estaremos rompendo com uma

> [...] concepção de matemática excessivamente voltada para a construção de um conhecimento feito e estabelecido, com todo o aparato de rigor e exatidão de um conhecimento pronto para ser utilizado, o erro constitui algo que deve ser eliminado e punido: jamais analisado e tratado, pois representa a falha, o déficit, a negação, [...], a dúvida, a incerteza, a incompletude; enfim, tudo que uma ciência exata e rigorosa abomina em seu produto final.

Quando se discute o processo de ensino-aprendizagem, busca-se encontrar a melhor forma do professor ensinar o conteúdo para que o aluno de fato apreenda-o. Cury acredita que "[...] analisar a produção [escrita dos alunos] é uma atividade que traz, para o professor e para os alunos, a possibilidade de entender mais de perto como se dá a apropriação do saber [...]" (2008, p.13). E consequentemente como o erro se constituiu, pois o mesmo pode ser entendido "como um conhecimento, é um saber que o aluno possui, construído de alguma forma, e é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando os estudantes a um questionamento sobre as suas respostas" (CURY, 2008, p. 80). Se o professor tomar atitudes como esta de discutir os erros cometidos pelos alunos com eles próprios, estará rompendo com a idéia de que o erro deve ser punido. Assim, o trará para as intervenções como um trampolim para a aprendizagem.

Estaremos identificando e classificando os erros encontrados por nós nas resoluções dos sujeitos investigados no que diz respeito a uma parte do conteúdo de análise combinatória, bem como apontando possíveis estratégias de ensino que possam auxiliar alunos e professores a fim de evitar os erros por nós percebidos. Segundo Pessoa e Borba a análise combinatória,

> [...] nos permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas fórmulas, pode se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis em uma dada situação, sem necessariamente ter que contá-los um a um. (PESSOA; BORBA, 2010, p. 2)

Na concepção de Morgado et al., a análise combinatória é de um modo geral, "a parte da matemática que analisa estruturas e relações discretas" (MORGADO et al, 1991, p. 1). O assunto análise combinatória, apesar de ser, segundo Pessoa e Borba (2009), introduzido formalmente nas séries iniciais com problemas multiplicativos, não é conteúdo de fácil aprendizagem. Morgado et al (1991) no prefácio de seu livro "Análise combinatória e probabilidade" afirmam que a análise combinatória "tem sido frequentemente indicada por professores do 2º grau como sendo a parte da Matemática mais difícil de ensinar".

Provas como o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) e o ENADE (Exame Nacional de Desempenho de Estudantes), que avaliam a educação brasileira em diferentes níveis, exigem dos alunos habilidades referentes a esse conteúdo. O descritor 32 do SAEB, diz que o aluno deve "Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples" (BRASIL, 2008, p. 79).

Em nosso estudo, verificamos uma grande dificuldade dos alunos em solucionar um problema de análise combinatória. Entendemos que essas dificuldades são trazidas da educação básica e que até o momento não foram sanadas. Talvez a dificuldade em um aluno aprender este conteúdo, esteja ligada ao fato de professores tentarem fazer com que o aluno compreenda conceitos prontos. Morgado et al (1991), afirmam que esta técnica pode criar no aluno a impressão de que a combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas. Os autores acreditam que,

> [...] a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Este é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução. (MORGADO et al, 1991, p. 2).

Cury (2004, p. 131) nos afirma que, "muitos professores (ou pais de alunos!) pesam que é suficiente a realização de extensas listas de exercícios repetitivos, de acordo com um modelo, para que os estudantes se apossem dos conceitos [...]", e nos alerta: "[...] Um treinamento, ainda que fixe certas rotinas, não permitirá ao aluno generalizar os procedimentos para outros conteúdos".

Concentrar o ensino de matemática na aplicação de fórmulas sem explicar os significados das mesmas, não irá possibilitar uma discussão rica a respeito dos caminhos percorridos para alcançar o aprendizado.

METODOLOGIA

Para identificar os alunos utilizamos os seguintes símbolos: as letras A, T, B e V, identificam os alunos de Alagoinhas, Teixeira de Freitas, Barreiras e Vitória da Conquista respectivamente, a letra X para os estudantes do 1º semestre e a letra Y para os alunos do 6º, como também, um número para diferenciar os alunos. Para este trabalho analisamos as resoluções de 137 alunos do 1º e 6º semestres, sendo, 30 de Alagoinhas, 21 de Barreiras, 34 de Teixeira de Freitas e 50 alunos de Vitória da Conquista.

A questão escolhida para ser discutida neste artigo possui o seguinte enunciado: Três estudantes chegaram juntos a uma cidade para participar de um congresso e, não tendo feito reservas com antecedência, constataram que em cada hotel poderiam ficar até dois estudantes. Sabendo que há apenas quatro hotéis na cidade, calcule o número máximo de possibilidades de hospedagem.

É interessante observar que para os alunos resolverem esta questão corretamente, eles precisariam notar duas possibilidades para hospedar os estudantes: colocar um estudante em cada hotel e colocar dois estudantes em um hotel e um no outro hotel.

Na primeira análise das resoluções dos alunos, verificamos que entre os sujeitos da pesquisa nesses campi não houve resoluções corretas. Assim, separamos as resoluções erradas das não respondidas. Para as resoluções erradas elaboramos categorias de acordo os erros encontrado, criando assim, 5 grupos, que são apresentados abaixo.

Esboço das Categorias definidas para análise da 6ª Questão:

1° Grupo: Tentaram responder, sem sucesso, aos dois casos da resolução. Esses dois casos se referem a alojar os estudantes: um por hotel e, dois em um hotel e o 3º estudante em outro hotel.

2° Grupo: Identificação de padrões de contagem ou princípio multiplicativo. Este grupo pode ser exemplificado pelas estratégias:

1ª estratégia: Apenas consideraram um estudante em cada hotel;

2ª estratégia: Apenas consideraram dois estudantes em um hotel e um no outro hotel;

3ª estratégia: Apenas consideraram dois estudantes em cada hotel.

3º Grupo: Utilizaram como estratégia de solução a permutação.

4º Grupo: Usaram fórmula(s) de maneira errada(s). Sendo que estas fórmulas se referem à combinação ou arranjo.

5º Grupo: Não recorreram a conceitos referentes ao assunto Análise Combinatória (aqui entram as questões como regra de 3, potência, uso das operações, etc.).

RESULTADOS

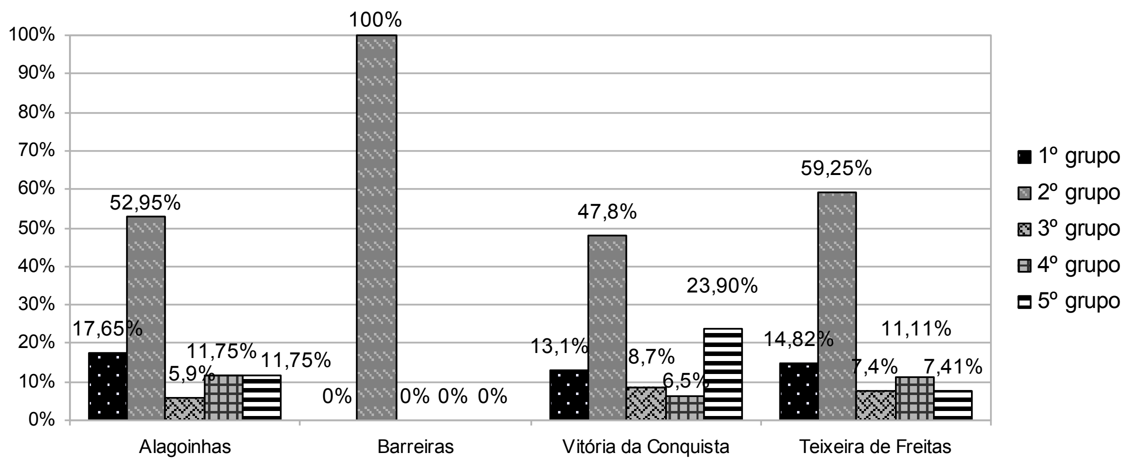
Na primeira análise que realizamos, tivemos por objetivos identificar e quantificar as resoluções corretas, erradas e não respondidas. Surpreendemo-nos pelo fato de nenhum dos alunos, dos quatro campi analisados terem acertado a questão. Na tabela 1 apresentamos essa quantificação por campus e semestre, em relação a 6ª questão do teste padrão.

Tabela 1 - Quantificação das resoluções dos alunos da 6ª questão do 1º Teste

Campus	1º semestre			6º semestre			Total 1º S.	Total 6º S.
	Acerto	Erro	Não Respondida	Acert o	Erro	Não Respondida		
Alagoinhas	00	17	06	00	07	00	23	07
Barreiras	00	09	01	00	04	07	10	11
Teixeira de Freitas	00	18	02	00	13	01	20	14
Vitória da Conquista	00	32	05	00	11	02	37	13
Total	**00**	**76**	**14**	**00**	**35**	**10**	**90**	**45**

No gráfico abaixo, detalhamos a categoria: Resoluções Erradas, apresentando a porcentagem dos alunos que erraram esta questão por grupo de erros, destacados na página anteriormente.

Questão 6 – Teste Padrão: Categoria Resoluções erradas



Percebemos que a maioria das resoluções dos alunos se encaixou no 2º grupo e está na terceira estratégia, conforme tabela abaixo:

Tabela II - Estratégias recorridas: 2º grupo das Resoluções Erradas

Campus	1ª Estratégia	2ª Estratégia	3ª Estratégia

Alagoinhas	01	03	05
Barreiras	01	03	05
Vit. Da Conquista	02	06	14
Teixeira de Freitas	02	05	07
Total	**06**	**17**	**31**

A 3ª estratégia é a mais recorrida, e é também aquela em que a maioria dos alunos considerou apenas dois estudantes em cada hotel. Escolhemos 7 resoluções, uma de cada grupo da categoria resoluções erradas, para exemplificar as dificuldades dos alunos que encontramos em nossa análise.

A resolução feita pelo aluno T16X do campus de Teixeira de Freitas exemplifica o 1º grupo das resoluções erradas. Os alunos deste grupo foram os que mais chegaram próximo da resolução correta. Porém, eles não conseguiram enumerar todas as possibilidades. Este, por exemplo, enumerou apenas 16 das 60 formas possíveis de hospedar os estudantes.

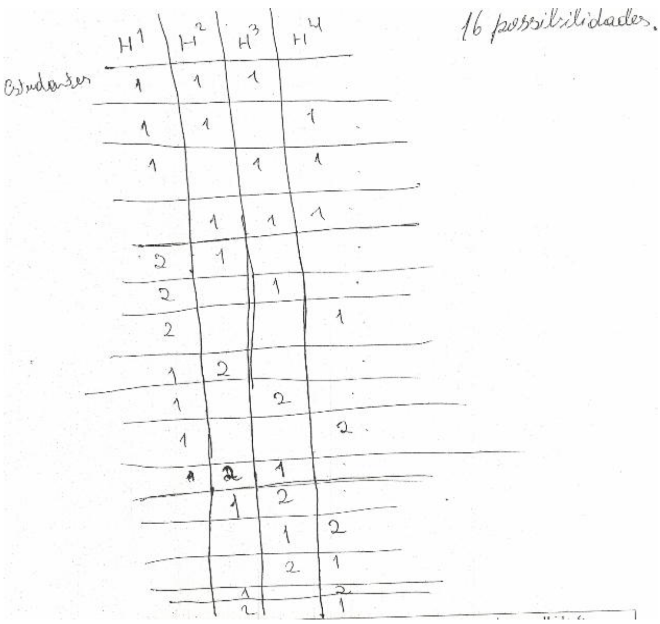


Figura I - T16X

ISSN: 2175-5493

IX COLÓQUIO DO MUSEU PEDAGÓGICO
5 a 7 de outubro de 2011

Na resolução do aluno do campus de Alagoinhas A23X, verificamos que o mesmo considerou apenas uma das possibilidades de dispor os estudantes nos hotéis, colocando um estudante por hotel. Trata-se da 1ª estratégia do 2º grupo, em que mais 5 alunos da amostra em questão, também recorreram para tentar solucionar este problema.

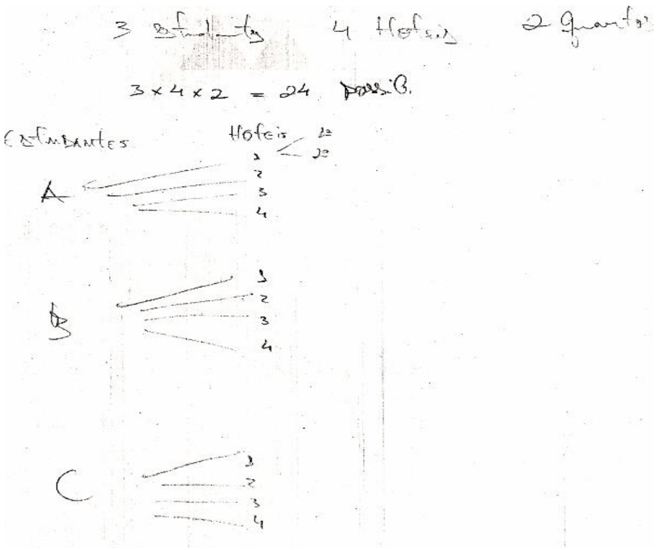
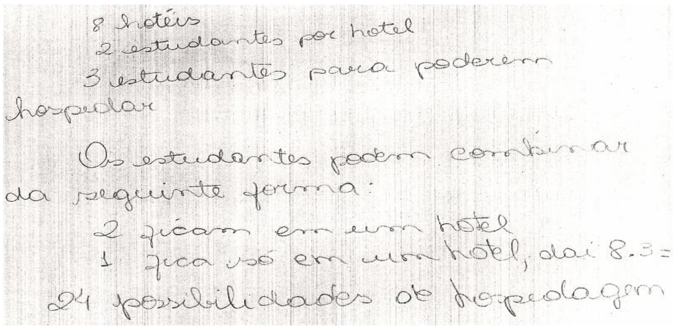


Figura II – A23X

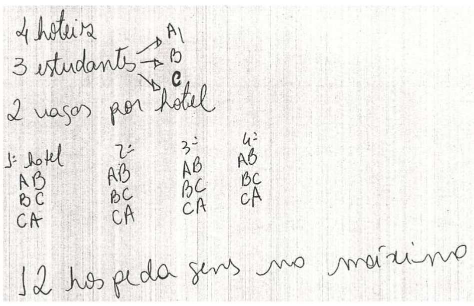
Observe na resolução do aluno do campus de Barreiras B10Y, que o mesmo recorreu a 2ª estratégia do 2º grupo para tenta resolver a questão. Este e mais 16 alunos dos 137 em estudo, notaram apenas a possibilidade de colocar dois estudantes em um hotel e um no outro.



8 hotéis
2 estudantes por hotel
3 estudantes para poderem hospedar
Os estudantes podem combinar da seguinte forma:
2 ficam em um hotel
1 fica só em um hotel, daí 8.3 =
24 possibilidades de hospedagem

Figura III - B10Y

Para exemplificar a 3ª estratégia do 2º grupo escolhemos o aluno V13Y do campus de Vitória da Conquista. Este considerou apenas dois estudantes por hotel, encontrando apenas 12 possibilidades.



4 hoteis
3 estudantes → A B C
2 vagas por hotel
1º hotel AB BC CA
2º AB BC CA
3º AB BC CA
4º AB BC CA
12 hospedagens no máximo

Figura IV - V3Y

Com relação ao 3º grupo, percebemos que 7 alunos fizeram uma permutação para determinar o número de possibilidades de hospedagem dos estudantes. O aluno V21X, por exemplo, fez apenas 3! encontrando 6 possibilidades, mas não explicou como chegou a essa conclusão. Se ele tivesse considerado 4! Ele teria acertado a 1ª parte do problema. Segundo Pessoa e Borba (2010, p.4) a permutação ocorre "[...] quando todos os elementos do conjunto serão usados cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição). A ordem dos elementos gera novas possibilidades [...]".

ISSN: 2175-5493

Figura V – V21 X

Nenhum aluno de Barreiras e do 6º semestre de Teixeira de Freitas recorreu a essa estratégia para resolver a questão.

Na amostra em estudo encontramos para o 4º grupo, 8 alunos que utilizaram as fórmulas de combinação e arranjo, sendo nenhum destes do campus de Barreiras. Para exemplificar, escolhemos o aluno A1Y do campus de Alagoinhas. Observe que ele iniciou utilizando a fórmula de arranjo corretamente, encontrando assim 24 possibilidades para o caso de ficar um estudante por hotel. Porém, ele não obteve sucesso na segunda parte da resolução quando utilizou a fórmula de arranjo de forma incorreta.

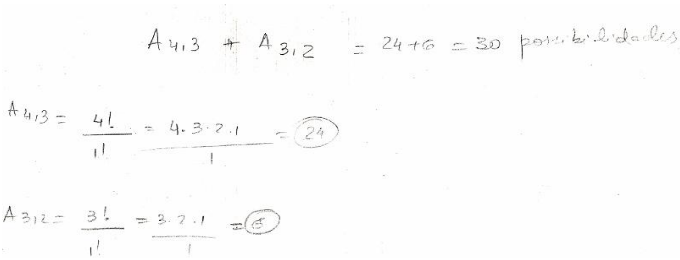


Figura VI - A1Y

Apresentaremos agora resoluções em que a solução foi recorrer a outros tipos de conteúdos, porém não tendo respaldo no assunto análise combinatória, explicando o que encontramos em relação ao 5º grupo. As maneiras de responder foram recorrendo a potenciação, aluno V2X, do campus Vitória da Conquista; e o aluno V9X, também de Vitória da Conquista, que recorreu a regra de três.

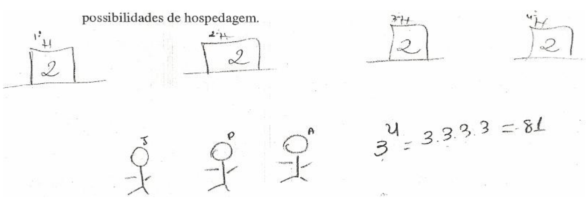


Figura VII - V2X

Figura VIII – V9X

Outro tipo de resposta que chamou a nossa atenção foram os depoimentos de alguns alunos, que afirmaram nunca terem estudado este conteúdo como, por exemplo, o aluno T6X de Teixeira de Freitas.

Figura IX – T6X

CONCLUSÕES

Podemos considerar que a grande dificuldade foi não perceber que para resolver a questão era necessário dividir o problema em duas partes e que se poderia recorrer a maneiras diferentes em cada uma dessas partes, por exemplo: para hospedar um estudante por hotel, poderíamos recorrer a permutação ou arranjo e para colocar dois estudantes em um hotel e o 3º em outro hotel, poderíamos recorrer ao arranjo e a combinação.

Em relação aos erros encontrados podemos dizer que os mesmos muito nos preocupam. Apesar de não encontrarmos acertos, verificamos um número muito pequeno de alunos que consideraram as duas estratégias. Identificamos alguns erros como: aplicação das fórmulas de arranjo e combinação em momentos inadequados segundo o contexto da situação-problema ou na própria escrita das fórmulas, confundindo arranjo com combinação; recorrer a assuntos que não fazem parte do conteúdo análise combinatória, por exemplo: potenciação, regra de 3. Verificamos que entre os campi obtivemos erros similares.

Importante observar que nossa pesquisa apresentou dados próximos ao que as autoras Pessoa e Borba (2010) encontraram. Por exemplo: elas citam uma pesquisa feita por Rocha 2007) com 17 licenciandos em matemática investigando a aprendizagem sobre análise combinatória e relatam que de cinco questões apenas dois sujeitos acertaram 1 questão e um outro aluno acertou 2 questões. Elas dizem ainda: "Estes tinham dificuldades em definir ou exemplificar noções básicas da combinatória (apenas 20% conseguiram enunciar corretamente o Princípio Multiplicativo ou as noções de Arranjo ou Combinação)". (ROCHA, 2007 apud, BORBA, et al, 2009, p. 7).

Outro item que se aproxima da nossa pesquisa, esperava-se que os alunos do 6º semestre tivessem um desempenho maior que os alunos do 1º semestre, assim como Pessoa e Borba (2010) esperavam que o desempenho dos alunos do ensino médio fosse superior aos dos alunos do ensino fundamental: "[...] dos alunos do ensino médio esperava-se um avanço maior, pois se previa que o possível trabalho formal com a análise combinatória ocorrida neste nível de ensino tivesse um impacto maior no desempenho" (p. 14)

Outra situação similar foi em relação ao uso de fórmulas, pois os estudantes que tiveram suas respostas enquadradas no 4º grupo recorreram ao uso das fórmulas de maneira incorreta.

> [...] ao se utilizarem de fórmulas, alunos ainda o fazem de maneira inadequada, demonstrando que o mesmo formalizando esse ensino, talvez o trabalho não esteja ocorrendo de maneira adequada, que deveria ajudar o aluno a pensar sobre a lógica implícita em cada significado de problema estudado [...]. (PESSOA; BORBA, 2010, p. 14).

Outro ponto nos chamou atenção. Essas autoras comprovaram em suas pesquisas que à medida que os níveis de escolarização aumentam o desempenho também cresce. Porém, não podemos afirmar que isso ocorreu em nossa pesquisa se compararmos o desempenho dos alunos de 1º com os de 6º semestre, pois além dos erros serem comuns, as estratégias de solução são muito parecidas mesmo em diferentes cidades.

Em relação a possíveis estratégias de ensino para evitar esses erros e dificuldades, recomendamos que os professores investiguem com seus alunos todo o processo desenvolvido para chegar a resposta final, mesmo utilizando uma fórmula. Que experimentem fazer outros registros como desenhos, árvores de possibilidades, dramatizações para que possam entender como e por que chegaram àquela resposta final, muitas vezes encontrada por meio da fórmula. É importante que o professor potencialize os erros que serão cometidos ao tentarem resolver os problemas e a partir deles, questione os alunos sobre seus raciocínios, que desestabilize suas "certezas" fazendo com que percebam que o caminho não é o que estão apresentando.

Em conformidade com Pessoa e Borba (2010, p. 20) dizemos que: "Destaca-se a importância de serem considerados em sala de aula os variados significados, distintas relações e propriedades e diversificadas representações simbólicas que compõem as situações combinatórias [...], no sentido de auxiliar os alunos no desenvolvimento desse raciocínio".

Isso se aplica também ao ensino superior, pois esses dados que apresentamos se referem a futuros professores de matemática que estarão ensinando esse conteúdo. Necessitamos discutir nos cursos de formação de professores sobre os erros e a avaliação em matemática. Conforme Cury (2008, p. 93): "Parece que cada erro cometido por um futuro professor de matemática é apontado, é riscado em vermelho, e a ele se atribui alguma pontuação negativa, mas raramente há tempo para voltar ao erro e partir dele para reconstruir algum conhecimento". Na tentativa de ajudar esses alunos que em breve estarão dentro das salas de aula "ensinando" ou remediando, apresentamos a Análise de Erros como metodologia de ensino e também de pesquisa, para auxiliar professores e futuros professores de matemática, já que no momento em que passamos a discutir o erro, ele "dirige o olhar do professor para o contexto e para o processo do conhecimento a ser construído. Avalia-se menos para punir e mais para formar". (PINTO, 2000, p. 12).

REFERÊNCIA

BORBA, R. E. S. R.; ROCHA, C. A.; MARTINS, G. V.; LIMA, R. C. G. O que dizem estudos recentes sobre o raciocínio combinatório. In: Encontro Gaúcho de Educação Matemática. **Anais...** Ijuí: EGEM, 2009. p. 1-12.

BORTOLOTI, R. D. M.; ET AL. **Análise dos erros cometidos por discentes de cursos de licenciatura em matemática das universidades estaduais baianas**. Projeto de Pesquisa – Departamento de Química e Exatas. Vitória da Conquista: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, BA, 2007. 20f.

BRASIL. PDE: **Plano de Desenvolvimento da Educação:** SAEB: Ensino médio: Matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: Ministério da Educação (MEC), 2008.

CURY, H. N. “Professora eu só errei um sinal!”: como a análise de erros pode esclarecer problemas de aprendizagem. In: CURY, H. N. (Org.). **Disciplinas Matemáticas em Cursos Superiores**: Reflexões, Relatos, Propostas. Porto Alegre: EDPUCRS, 2004. p. 111-138.

________. **Análise de Erros o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade.** Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

PESSOA, C. A. dos S.; BORBA, R. E. de S. R. Quem dança com quem: O desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **Zetetike** (UNICAMP), v. 17, 2009. p. 105-150,

PESSOA, C., BORBA, R.. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. Em Teia | **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, América do Norte, 1, jun. 2010. Disponível em: <http://emteia.gente.eti.br/index.php/emteia/article/view/4/2>. Acesso em: 24 Abr. 2011.

PINTO, N. B. **O Erro como Estratégia Didática.** 2. ed. Curitiba: Papirus, 2000.