



ISSN: 2175-5493

VI COLÓQUIO DO MUSEU PEDAGÓGICO

27 a 29 de novembro de 2006

**LOS PROCESOS METACOGNITIVOS EN LA COMPRENSIÓN DE LAS PRÁCTICAS
DE LOS ESTUDIANTES CUANDO RESUELVEN PROBLEMAS MATEMÁTICOS:
UNA PERSPECTIVA ONTOSEMIÓTICA**

Tânia Cristina R. S.
(UESB)

P. Antón Labraña Barrero
(Universidade de Santiago de Compostela)

“Hablando se aprende, escuchando se enseña”⁴⁰¹

Contexto General del Estudio

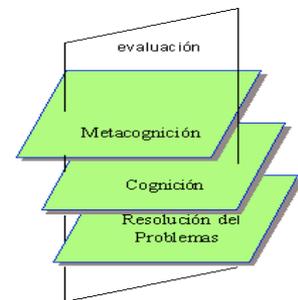
La labor investigadora que nos propusimos desarrollar nos ha permitido, entre otras cosas, reflexionar, una vez más, sobre nuestro papel como agente hablante y oyente del proceso educativo. Cuestionamos muchas veces nuestro papel como educadores, un papel que puede marcar definitivamente el rumbo educativo (en el sentido amplio del término educación) de nuestros alumnos. Evocamos en este punto a Paulo Freire (y a sus obras “Pedagogía del Oprimido” y “Educación como Práctica de la Libertad”), cuando percibimos que no podemos hablar del papel de profesor sin hablar del diálogo, fenómeno que puede romper la relación opresor-oprimido, aún más inmersos en un sistema educativo que, bajo nuestro punto de vista, es fuertemente tradicionalista y, por ello, resistente a cambios. Percibimos que desempeñar el papel de profesor requiere -además de valores siempre reconocidos, como el de ser innovador, el gusto por lo que se hace, el preocuparse por el alumno, por su aprendizaje- estimular el diálogo y dar oportunidad para que el alumno hable y hable nuevamente, una y otra vez;

⁴⁰¹ Aforismo crítico del modelo tradicional de enseñanza y que sustentaba las clases del profesor Baldino en la UNESP -Universidade Estadual Paulista- Brasil.

requiere ponerse como alumno, ser oyente, escuchar y escuchar nuevamente, una y otra vez. En este momento ya nos estamos remitiendo al aforismo de la cita previa: *hablando se aprende, escuchando se enseña*.

El trabajo del profesor en clase debería centrarse más en escuchar y menos en hablar, cediendo, poco a poco, protagonismo al alumno, que debería a su vez, y a través de la comunicación constante, conquistar el aprendizaje. Es percibiendo al profesor como un elemento menos hablante y más oyente como vemos su contribución a la formación de un ciudadano crítico, reflexivo. Es así como tiene sentido hablar de un profesor convergente con una práctica de la enseñanza liberadora, en el sentido de Paulo Freire, volcada hacia la autonomía del alumno en su aprendizaje.

En la práctica investigadora que proponemos, nos adentraremos en tres áreas de estudio relacionadas con la enseñanza-aprendizaje de la Matemática: Metacognición, Cognición y Resolución de Problemas (RP). Hablar de cualquiera de estas implica hablar de la otra, ya que son tres áreas íntimamente relacionadas y, juntas, nos ayudarán a comprender las razones que guían las prácticas que realizan los estudiantes en el proceso de Resolución de Problemas.



Obviamente, entraremos en una cuarta área que es transversal a las primeras, la de Evaluación.

La Metacognición es una temática que en esencia requiere, entre otras cosas, reconocer y observar la autonomía del alumno. De forma que nos pareció oportuno estar evocando las enseñanzas de Paulo Freire (Freire, 1979; 1996). Así, una educación que promueva el desarrollo de la metacognición estará contribuyendo al desarrollo de la autonomía del estudiante (también en el sentido de Freire). Para ello, es necesario estimular el desarrollo de habilidades metacognitivas (Mateos, 2001), acercándoles progresivamente al control de su

propio proceso de aprendizaje (Trillo, 1989), respondiendo a una necesidad de la escuela (de la educación) que desee favorecer la autonomía en el aprendizaje (Lafortune, Jacob y Hébert, 2003). “No sólo conseguir alumnos más reflexivos y concientes de los procesos mentales (...), sino que esa reflexión sirviera como medio para facilitar el avance de los alumnos en la dirección de la auto-regulación de sus propios procesos de aprendizaje” (Mateos, 2001, p.15).

El papel relevante que la educación formal y, de forma similar, la no formal (o espontánea) desempeñan en el desarrollo de los procesos metacognitivos es plasmado en el ámbito general de las investigaciones en el área educativa (Mateos, 2001; Mayor, Suengas y González, 1993; Crespo Allende, 2000-1; Schoenfeld, 1985a; González, 1996; Schraw, 2001; Hartman, 2001 y Gourgey, 2001). En Didáctica de las Matemáticas, por ejemplo, al igual que en otras, muchos de los esfuerzos se dirigen a tratar de comprender las relaciones entre cognición y metacognición. En la revisión de la literatura pertinente, observamos que muchos de los estudios que se preocupan por comprender las relaciones entre estos procesos se apoyan (y aquí nos incluimos) en la definición de Flavell (1976) para diferenciar las estrategias cognitivas de las metacognitivas: las estrategias son cognitivas cuando son empleadas para hacer progresar la actividad cognitiva hacia una meta, y son metacognitivas cuando su función es supervisar ese progreso. Sin embargo, esta diferenciación no siempre resulta fácil de discernir. De hecho, se presentaron algunas dificultades cuando intentamos aplicarla a una práctica matemática (como por ejemplo, la resolución de un problema) pretendiendo una mejor comprensión de dicha práctica. Esto nos ha llevado a buscar marcos teóricos que intentasen explicar la realización de una práctica. De ahí la decisión de utilizar el “Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática” (EOS).

El EOS es un enfoque emergente que viene desarrollándose hace más de una década por Godino y colaboradores (por ejemplo, Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Roa, 2005 y Font, 2005-6). Propone un análisis

de la noción de “significado” desde un punto de vista didáctico, dirigido, entre otras cosas, a apoyar los estudios sobre la evaluación de los conocimientos. Para este análisis, el modelo teórico desarrollado se basa en los supuestos pragmáticos del significado de los objetos matemáticos desde una triple perspectiva: institucional, personal y temporal. Los objetos matemáticos son concebidos como entidades emergentes de sistemas de prácticas. Se propone como objeto básico para el análisis “los sistemas de prácticas manifestados por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones-problemas” (Godino, 2002, p.242). Las prácticas, así como la dialéctica personal-institucional, ocupan un lugar privilegiado en este enfoque proporcionando una visión más integral de la problemática del conocimiento del alumno.

Para analizar la actividad matemática el EOS nos presenta la “Técnica del Análisis Semiótico”, mostrándonos cómo aplicar la tipología de objetos y dimensiones del conocimiento matemático construidos por dicho “enfoque”. A pesar del indispensable apoyo de este “enfoque” para nuestro trabajo, entendíamos que, para interpretar con mayor detalle la complejidad de los fenómenos asociados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el contexto de RP y, por ende, de la comprensión de las matemáticas, era necesario considerar además, explícitamente, los aspectos metacognitivos.

Finalmente refiriéndonos al área de RP, es conocido que los problemas y su resolución han marcado el desarrollo de la Historia de las Matemáticas y, en tanto que línea de investigación, fue (y continua siendo) uno de los pilares básicos del edificio de la Educación Matemática como disciplina científica (Fernandes, 1988, 1991-2; Lester, 1994; Vilas, 2001, 2004; González, 2005) que tiene como uno de sus principales objetivos capacitar a los estudiantes para resolver problemas. Pero el logro de este objetivo no es nada fácil (Pifarré y Sanuy, 2001). La realidad del aula muestra la casuística de dificultades y errores observados en el alumnado en el proceso de resolución de problemas matemáticos (Callejo y Vilas, 2003). “La

resolución de problemas debe erigirse como objeto de aprendizaje, fin en sí misma, como contenido procedimental aplicable en cualquier situación cotidiana” (Contreras y Carrillo, 1997, p.22). La RP es un proceso complejo y, como tal, las investigaciones que intentan comprender ese proceso atribuyen la causa del éxito y/o fracaso de los estudiantes a un conjunto de variables que, de un modo u otro inciden en las competencias del estudiante y, por tanto, en su práctica: conocimientos (declarativo, procedimental y condicional), estrategias (cognitivas y metacognitivas), recursos, heurísticas, control, emociones, actitudes, sistemas de creencias, contextos socio-culturales,..., entre otras (Schoenfeld, 1992; Lester, 1994a, 1994b; Fernandes, Borralho y Amaro 1994; Guzmán, 1995; Carrillo, 1996, 1998; Puig y Cerdán, 1996; D’Amore, 1997; Hegedus, 2000; Gusmão 2000a,b; Vilas, 2001, 2004; González, 2005, entre otros).

Orientaciones para el Problema

Uno de los intereses de la Didáctica de las Matemáticas es identificar el significado que los alumnos atribuyen a los objetos matemáticos (conceptos, propiedades...), así como explicar la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción. Si aceptamos que un sujeto “comprende” o “capta” el significado de un objeto cuando es capaz de reconocer sus propiedades y representaciones, relacionarlo con otros objetos y aplicarlo a una variedad de situaciones problemáticas prototípicas, estaremos relacionando la idea de “significado” con la de “comprensión” (Godino, 2003).

La importancia que tiene la noción de comprensión para la Didáctica de las Matemáticas se ve plasmada en diferentes investigaciones y documentos curriculares de amplia difusión e influencia internacional como los del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989, 1995, 2000), pero su caracterización continúa siendo un problema. Y, en este orden, Sierpínska (1994,

p.3) formula las siguientes preguntas: ¿Cómo enseñar de modo que los estudiantes comprendan?; ¿qué es lo que no comprenden?; ¿qué comprenden y cómo? En los documentos referidos del NCTM se señala que los estudiantes deberían comprender las matemáticas, sin embargo, la realidad del aula parece distanciarse de estos planteamientos. La práctica del aula parece decantarse hacia la práctica rutinaria de ejercicios algorítmicos, con clara predominancia del marco aritmético-algebraico, promoviendo casi en exclusiva la “comprensión instrumental” (en el sentido de Skemp, 1976). Esta práctica muestra también debilidades, como la escasa puesta en escena de variados sistemas de representación del conocimiento matemático y la ausencia significativa de contextos y situaciones-problema enfocados hacia la comprensión, y consecuente aprendizaje, de los conceptos matemáticos objeto de estudio. En Galicia (España), esta apreciación se refleja con nitidez tanto en la posición de los profesores de matemáticas, como en los enfoques de los textos de impacto relevante en el aula, y en la consecuente influencia sobre las carencias comprensivas, por parte de los estudiantes, del conocimiento matemático propio del nivel educativo en que estos se encuentran. (Godino, 2003; Cajaraville, J., Fernandez, T., Labraña, P., Salinas, M., De La Torre, H., Vidal, E., 2003a)

Existen indicadores que justifican la realización de estudios que aborden diversos aspectos de las acciones de los estudiantes en situación de aprendizaje y, en particular en el proceso de RP (e.g. los documentos del NCTM, 2000, y el Informe PISA/OCDE, 2003). Por ello, la actividad de RP, también merece una atención especial en ese contexto, toda vez que la matemática puede ser concebida como la actividad de resolver problemas (Polya, 1965). A pesar de lo mucho que se ha investigado existe un interés constante en evaluar las capacidades de los estudiantes y los procesos implicados en la RP que, como área de investigación, continúa siendo todo un campo de inspiración.

Entre las propuestas (o programas) que de un modo general utilizan la RP y la actividad matemática como fuente para la construcción del conocimiento matemático, que son llevadas a cabo por algunos investigadores en el intento de comprender cómo los estudiantes realizan una práctica, están el EOS (Godino, 2002; Font, 2005; entre otros) y la metacognición que, además, se convierte en un medio para ayudar al estudiante a mejorar sus competencias en la RP y, consecuentemente, para lograr aprender comprensivamente las matemáticas. La metacognición viene desempeñando un papel importante en la RP y como tal reconocen su relevancia autores ya mencionados aquí (e.g., Fernandes, 1992; Lester, 1994; González, 1996).

En estudios previos realizados con estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.) (Gusmão, T. R. S; Cajaraville, J. A.; Labraña, P. A. 2004a,b; Gusmão, et. al. 2005a,b; Cajaraville, J. A.; Labraña, P. A. y Gusmão, T.R.S. 2003b), en los que fundamentalmente las herramientas teórico-metodológicas usadas venían del campo de la metacognición, constatamos que los análisis hechos de los conflictos y dificultades observadas en estos estudiantes cuando realizaban prácticas para resolver problemas eran limitados, lo que nos llevó a plantear la posibilidad de completarlos utilizando los constructos del enfoque ontosemiótico.

Es en esta perspectiva en la que situamos nuestra investigación, en la cual utilizaremos el EOS y la Metacognición como medios fundamentales para el análisis de las prácticas manifestadas por los estudiantes en el proceso de RP.

Problema y cuestiones de la investigación

Nuestra investigación se centra, en particular, en el estudio de las relaciones entre los procesos cognitivos y metacognitivos y las prácticas de RP por parte de estudiantes de determinados niveles educativos. Todo ello con la perspectiva de que los propios procesos formativos, de matemáticas en particular y de cualquier

VI COLÓQUIO DO MUSEU PEDAGÓGICO

27 a 29 de novembro de 2006

materia en general, debieran contribuir al desarrollo de conocimientos metacognitivos preexistentes. Así, resulta necesario presentar el problema de investigación, que viene determinado por las siguientes cuestiones:

CUESTIONES GENERALES	CUESTIONES ESPECÍFICAS (y aclaraciones)
<p>CG1. <i>¿De qué manera podemos comprender las prácticas que realizan los estudiantes en el proceso de RP a través de la integración de ciertos constructos teóricos del EOS y de la Metacognición?</i></p>	<p>CE1. <i>¿Cómo podemos describir, analizar e interpretar las prácticas que realizan los estudiantes de dos niveles educativos, E.S.O. (Educación Secundaria Obligatoria) y Magisterio, considerados individualmente, en grupo y con el apoyo del profesor, en el proceso de RP a través de la integración de los constructos del EOS y de la Metacognición para?</i></p>
<p>CG2. <i>¿Qué relaciones podemos identificar entre las competencias metacognitivas de los estudiantes, evaluadas en nuestras tareas de RP, y su rendimiento académico?</i></p>	<p>CE2. <i>¿Qué relaciones podemos identificar entre las calificaciones obtenidas por los estudiantes en nuestras tareas y sus Calificaciones Finales de Curso (CFC) (medidas por la media obtenida en el conjunto de todas las asignaturas), en particular, en la asignatura de Matemática (MAT)?</i></p>
<p>CG3. <i>¿Qué relaciones podemos identificar entre los niveles de competencia metacognitiva que los profesores presuponen (1) a sus alumnos y los niveles observados a través de una prueba externa (2)?</i></p>	<p>(1) <i>a través del conocimiento de aulas y tomando por base nuestra prueba (externa), el profesor estimará las competencias metacognitivas de sus alumnos (as). A esta estimación nombraremos EEP (Evaluación Estimada del Profesor).</i> (2) <i>PHM – Prueba de Habilidades Metacognitivas.</i></p>
<p>CG4. <i>¿De qué manera la metacognición emerge en los procesos de instrucción estándar (entendidos como aquellos que no han sido programados expresamente para</i></p>	

<i>desarrollar y/o incrementar la metacognición)?</i>	
---	--

En este contexto, consideramos cuatro premisas que son necesarias enunciar:

- 1) Consideramos que las prácticas de los estudiantes en el proceso de RP pueden ser mejor explicadas si se contemplan para su análisis la integración de ciertos constructos teóricos, como el EOS y la Metacognición;
- 2) Consideramos que las dificultades para resolver problemas, por parte de los estudiantes, están relacionadas con sus carencias cognitivas y metacognitivas;
- 3) Consideramos que las competencias metacognitivas de los estudiantes inciden de forma notable en su rendimiento académico en matemáticas;
- 4) Consideramos que el desarrollo de la metacognición forma parte de los propios procesos formativos, de matemáticas en particular y de cualquier materia en general, y que puede impulsarse si profesores y alumnos toman conciencia de éstos.

Pertinencia de la Investigación

Al intentar integrar ciertos constructos del EOS y de la Metacognición para estar en mejores condiciones de explicar, y luego comprender, las prácticas de los estudiantes en el proceso de RP, creemos estar contribuyendo, por una parte, a enriquecer el marco de la Metacognición, aportando nuevos matices de interpretación y clarificación de diferentes aspectos de dicha problemática desde un punto de vista didáctico, y, por otra, puesto que pretendemos complementar el Marco del EOS con el constructo de configuración metacognitiva, los resultados

pueden tener interés teórico. De modo que, comprender las prácticas de nuestros alumnos(as) en el campo de RP, es importante para establecer mejores condiciones que permitan aportar explicaciones a la problemática didáctica asociada al problema de la comprensión de las matemáticas (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2001-3; Cajaraville, et. al. 2003b; Gusmão, et. al. 2004a,b; Gusmão, et. al. 2005a,b; Font, 2005).

Quizás el estudio de las interrelaciones entre Cognición, Metacognición, RP y Evaluación, nos permita averiguar en qué dirección se pueden orientar las investigaciones para clarificar algunas lagunas que siguen latentes en la comprensión de la problemática didáctica de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como por ejemplo, que el fracaso puede estar asociado a la utilización de estrategias metacognitivas básicas o que las dificultades de aprendizaje estén asociadas con la ausencia de regulación del estudio (Gonçalves, 1996), y, a ser posible, derivar consecuencias para la superación de dificultades de aprendizaje de los estudiantes.

Finalmente, la importancia y relevancia de la presente investigación se relaciona con el interés nuclear de la comunidad de educadores matemáticos por la problemática del significado de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes cuando resuelven problemas. Y dado que, como aludimos anteriormente, aún faltan caminos por recorrer en el intento de entender los procesos de comprensión de los alumnos, experimentar nuevas formas de analizar y comprender sus prácticas es una forma de contribuir a aproximarnos a este entendimiento, y pensamos que esta investigación puede contribuir a motivar la realización de otros estudios en esta dirección.

Organización general del estudio

En el capítulo de la revisión de la literatura abordamos temas relativos a las áreas de estudio ya mencionadas. Con respecto al área de Cognición, dirigimos nuestra atención el programa del EOS, describiendo resumidamente su modelo teórico. Nos centramos especialmente en los constructos definidos como “configuraciones epistémicas y cognitivas” que tienen en cuenta las entidades u objetos matemáticos: *lenguaje, procedimientos, definición (concepto), proposiciones, argumentos, y situación-problema*, para explicar la realización de una práctica. Desde este contexto observamos la necesidad de ampliarlo, contemplando una configuración metacognitiva para la realización de dicha práctica. Así que, adentrados en el área de la Metacognición, consideramos pertinente hablar, entre otras cosas, de la trayectoria histórica de su desarrollo y, a partir de ahí, resaltamos la estructura organizativa de la temática, respetando los matices personales de cada investigador, que ayudan a expresar como ésta es percibida. Damos a conocer, sobre todo, cómo la metacognición puede ser desarrollada y/o incrementada a través de las experiencias en contextos sociales diversos y, específicamente, a través de procesos de instrucción formal o no formal. También desde este contexto, dejamos patente la necesidad de contemplar una configuración cognitiva para explicar la realización de una práctica. A continuación, pasamos al área de RP, toda vez que nuestro campo de actuación es la práctica de resolver problemas. Ofrecemos, ahí, una breve discusión de la relación entre RP y Metacognición. Como ya mencionamos el área de Evaluación es transversal a las tres primeras, de modo que la atención que damos a ésta está presente en todas las temáticas, pero particularmente dedicamos unos breves comentarios sobre cómo la metacognición es evaluada.

Finalizamos nuestro “marco teórico” con un apartado donde buscamos sintetizar y concluir el razonamiento inferido sobre una visión pragmática de la

metacognición, mostrando la organización de ideas en el intento de explicar lo que consideraremos como el constructo *configuración metacognitiva*, que vendrá a complementar el constructo configuración cognitiva del EOS.

A continuación, desde una perspectiva cualitativa-cuantitativa, exponemos nuestras opciones metodológicas, fruto tanto de la complejidad de la temática como de juicios personales sobre los modos de concebir una investigación en nuestro ámbito.

En el capítulo de análisis de los datos presentamos los análisis obtenidos a través de los instrumentos de investigación aplicados a una muestra de 185 estudiantes de 3º y 4º de E.S.O.; se analiza, también, el trabajo realizado con 4 alumnos de Magisterio (3º de Educación Primaria), lo que se complementa con el análisis de un proceso de instrucción. Estos análisis nos han permitido verificar las hipótesis enunciadas. De modo general, los resultados señalan que las competencias metacognitivas de los estudiantes parecen incidir sobre el rendimiento académico en matemáticas y que sus dificultades en la RP están relacionadas con sus carencias cognitivas y metacognitivas; y que un profesor consciente de su papel como formador de ciudadanos críticos, reflexivos y autónomos, conduce, inevitablemente, en el día a día, al alumno(a) a desarrollar competencias metacognitivas.

Finalmente, nuestro estudio culmina con algunas conclusiones. Entre otros aspectos, la investigación nos indica que los constructos “configuración epistémica y cognitiva” (del EOS) y el “constructo configuración metacognitiva”, juntos, constituyen una valiosa herramienta de análisis para comprender con eficacia la realización de las prácticas de los estudiantes en el proceso de RP. Cualquier proceso de instrucción que considera los aspectos metacognitivos como obvios supone perder la oportunidad de un trabajo explícito y consciente de los mismos, además, bajo cualquier intención de desarrollo de competencias metacognitivas,

está la de que ésta promueve, de forma natural, las dos posiciones complementarias del diálogo: hablar y escuchar.

BIBLIOGRAFÍA

- Cajaraville, J., Fernandez, T., Labraña, P., Salinas, M., De La Torre, H., Vidal, E. (2003a). *Avaliación do currículo de Matemáticas en 3º e 4º da ESO*. Investigación Educativa, (14). ICE. Santiago de Compostela: Universidad de Santiago de Compostela.
- Cajaraville, J. A.; Labraña, P. A.; Gusmão, T.R.S. (2003b). Sistemas semióticos e comprensión das matemáticas. Aportacións ó debate. *Enciga Enseñantes de Ciencias de Galicia*. Cangas, A Coruña/España, v. 1, p. 63-70.
- Cajaraville, J. A.; Gusmão, T.R.S. (2004). Problemática didáctica da medida de magnitudes na formación de mestres de educación primaria. *Enciga Revista dos Enseñantes de Ciencias de Galicia*. Santiago de Compostela/España, v. 1, n. 54, p. 39-53.
- Callejo, M. L, y Vila, A. (2003). Origen y Formación de Creencias Sobre la Resolución de Problemas. Estudio de un Grupo de Alumnos que Comienzan la Educación Secundaria. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2 (2003).
- Carrillo, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. (Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla). Sevilla, España.
- _____. (1998). La resolución de problemas en la enseñanza secundaria. Ejemplificaciones del para qué. *Epsilon, revista de la S.A.E.M. "Thales"*, nº 40, vol. 14(1), pp.15-26.
- Cobo B. M. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de Secundaria*. (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada.
- Contreras, L.C. y Carrillo, J. (1997). La resolución de problemas en la construcción de conocimiento. Un ejemplo. *SUMA, revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*. nº 24, pp.21-25.
- Contreras A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25 (2): 151-186.

- Crespo Allende N. M^a. (2000-2001). Metacognición, Metacomprensión y Educación. *Revista enfoques educacionales*, vol. 3, número 1. Universidad de Chile, de www.cpop.net/salalectura/0032.htm
- D'Amore, B. (1997). *Problemas: pedagogía y psicología de matemática en la actividad de resolución de problemas*. Versión en Español: Francisco vecino Rubio. Madrid: Editorial Síntesis.
- Fernandes, D. (1988). Aspectos metacognitivos na resolução de problemas de matemática. *Educação e Matemática* N^o 8, 4^o trimestre de 1988. *Revista da Associação de Professores de Matemática*. Lisboa.
- _____. (1991). Resolução de Problemas e Avaliação. Comunicação convidada. *Actas do 2^o Encontro Nacional de Didáticas e Metodologias de Ensino*. Universidade de Aveiro. Aveiro-Portugal.
- _____. (1992). Resolução de Problemas: Investigação, Ensino, Avaliação e Formação de Professores. In Brown, M., Fernandes D., Matos, J.F., y Ponte, J.P. *Educação Matemática*. Colección Temas de Investigação. Instituto de Innovación Educacional. Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Lisboa-Portugal.
- Fernandes, D., Borralho, A y Amaro, G. (1994). Processos de Resolução de Problemas: revisão e análise crítica de investigação que utilizou esquemas de codificação. In Fernandes, D. Borralho A. y Amaro G. (Orgs). *Resolução de Problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular*. Instituto de Inovação Curricular. Lisboa, Portugal. Temas de investigação 2.
- Ferreira, A. (2003). *Metacognição e desenvolvimento profissional de professores de matemática: uma experiência de trabalho colaborativo*. (Tese de Doutorado). Universidade Estadual de Campinas. São Paulo: Brasil.
- Flavell, J. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. Resnick (Ed.). *The nature of intelligence*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Font, V. (2001). Processos mentals versus competència. *Biaix*, 18, pp. 33-36.
- _____. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds): *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* pp. 109-128. Córdoba: Universidad de Córdoba.
- Font, V. y Ramos, A. B. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional. El caso de la contextualización de funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales. *Revista de Educación*, 338: 309-346.
- Freire, P. (1979). *Pedagogia do Oprimido*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.
- _____. (1996). *Educação como prática da liberdade*. 22^a edição. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

- Godino, J. D. (2002a). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22, (2/3): 237–284.
- _____. (2002b). Perspectiva semiótica de la competencia y comprensión matemática. *XVI Convengo Nazionale: Incontri con la Matematica*. Castel San Pietro Terme (Bologna), 8-9. Noviembre 2002.
- _____. (2002c). Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen? *UNO*, 29 p.9-19.
- _____. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque Ontológico-Semiótico de la Cognición e Instrucción Matemática*. Universidad de Granada. Documento publicado en Internet: [<http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf>].
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325–355.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*, 60: 3–36.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2006). Un enfoque ontosemiótico para la Didáctica de las Matemáticas. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*. Disponible en Internet: <http://www.ugr.es/local/jgodino>
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (en prensa). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (aceptado).
- Gonçalves, M^a. C. M. (1996). *A influência da Metacognição na aprendizagem: uma intervenção realizada na aula de matemática*. (Dissertação de Mestrado. Universidade Católica Portuguesa. Faculdade de Ciências Humanas). Lisboa, Portugal.
- González, F. (1993/1996). Acerca de la Metacognición. *Paradigma*, XIV al XVII, n.1, pp. 109 -135, jun.
- _____. (2005). *Cómo desarrollar clases de matemática centrada en resolución de problemas*. Cuadernos Educare. Cuaderno n^o 5. Serie Roja, (2^a ed). Escuela de Educación. Universidad de Los Andes. Mérida, Venezuela: Editorial Programa de Perfeccionamiento y actualización Docente (PPAD).
- Gourgey A. F. (2001). Metacognition in basic skills instruction. In Hartman H. J. (Ed). *Metacognition in learning and instruction: theory, research and practice* (pp.17-32). New York, EUA: Kluwer Academic Publishers.
- Guzmán, M. (1995). Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos. 2^a edición. Madrid: Pirámide.
- Gusmão, T.R.S; Cajaraville, J. A; Labraña, P. A. (2003). Competências metacognitivas

- e aprendizaxe das matemáticas. *In: XVI CONGRESO DO ENCIGA (ENSEÑANTES DE CIENCIAS DA GALICIA)*, Cangas/A Coruña. Enciga (Enseñantes de Ciências da Galicia). ENCIGA- ENSINANTES DE CIENCIAS DE GALICIA, v. 1, p. 55-61.
- _____. (2004a). Algunos matices de estrategias cognitivas-metacognitivas durante resolución de problemas con estudiantes de ESO. *Guía do XVII Congreso Enciga*, Santiago de Compostela/Espanha, v. 1, n. 56.
- _____. (2004b). Dificuldades estratégicas de alunos e professores em formação quando enfrentam problemas de medida de grandezas. *Veritati*, Salvador/Bahia/Brasil, v. 1, n. 4, p. 109-119.
- _____. (2005a). Percepciones e indagaciones en el reconocimiento de estrategias meta-cognitivas en el contexto de resolución de problemas. *In: V CIBEM: CONGRESO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, período 17-22 julho de 2005, Porto: Portugal.
- _____. (2005b). Metacognitive processes and mathematical competencies of junior high school students. *In: CONGRESO EUROPEU DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 2005, Barcelona/España.
- Hartman, Hope. J. (2001). Developing students' metacognitive knowledge and skills. In Hartman H. J. (Ed). *Metacognition in learning and instruction: theory, research and practice* (pp.33-68). New York, EUA: Kluwer Academic Publishers.
- Hegedus, S. (1998). *A study of the metacognitive behaviour of mathematics undergraduates in solving problems in the Integral Calculus*. (Doctoral Thesis. University of Southanmpton). United Kingdom.
- Lafortune, Jacob y Hébert, (2003). *Pour guider la métacognition*. Collection éducation-intervention. Québec: Presses de l'université du Québec.
- Lester Jr. F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 25, n.6, pp. 660-675.
- _____. (1994b). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. In Fernandes, D. Borralho A. y Amaro G. (Org). *Resolução de Problemas: processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular*. Instituto de Inovação Curricular. Lisboa: Temas de investigação 2.
- Mateos, M. (2001). *Metacognición y educación*. Serie Psicología Cognitiva y Educación. Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor.
- Mayor, J., Suengas, A. y González, J. (1993). *Estrategias Metacognitivas. Aprender a aprender y aprender a pensar*. Madrid: Síntesis Psicología.
- NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standars for school Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- _____. (1995). *Assessment standars for school mathematics*. Reston, VA. The NCTM.

- _____. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Edición electrónica: <http://standards.nctm.org/>
- OECD (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework: Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París. (Traducción castellana: INECSE (2004). Marcos Teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas. Madrid URL: http://www.ince.mec.es/pub/marco_teorico_pisa2003.pdf).
- Pifarré, Manoli y Sanuy, Jaime. (2001). La enseñanza de estrategias de resolución de problemas matemáticos en la ESO: un ejemplo concreto departamento de pedagogía y psicología. *Enseñanza de las Ciencias*, 19 (2), 297-308.
- Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. (15ª reimpression). Serie matemáticas. (Traducción, Prof. Julián Zugazagoitia). México: Editora Trillas.
- Puig, L. y Cerdán, F. (1996). Un curso de heurística matemática para la formación del profesorado. *UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas*. n.8, pp.83-90. Abril de 1996.
- Schoenfeld, A. H. (1985a). *Mathematical problem solving*. London, United Kingdom: Academic Press Inc. (London) Ltd.
- _____. (1992). Learning to think mathematically: Problem-solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grows (Ed.). *Handbook on research on mathematics teaching & learning*. New York: Macmillan Publishing Company.
- Schraw G. (2001). Promoting general metacognitive awareness. In Hartman H. J. (Ed). *Metacognition in learning and instruction: theory, research and practice* (pp.3-16). New York, EUA: Kluwer Academic Publishers.
- Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.
- Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, December, 1976.
- Trillo, F. (1989). Metacognición y enseñanza. *Enseñanza, ICE*, 7, 107-118. Universidad de Salamanca.
- Vilas, C. A. (2001). *Resolució de problemes de matemàtiques: identificació, origen i formació dels sistemes de creences en l'alumnat. Alguns efectes sobre l'abordatge dels problemes*. (Tesis Doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona. Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals, Barcelona.
- Vilas, C. A. y Callejo, M.L. (2004). Matemáticas para aprender a pensar: el papel de las creencias en la resolución de problemas. Madrid: Narcea.